Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a VII-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

La început de drum...

Au trecut doi ani petrecuţi la gimnaziu şi ne bucurăm că, citind aceste rânduri, te numeri printre prietenii matematicii. Deja ai făcut primii paşi în înţelegerea matematicii, în găsirea răspunsurilor la multele probleme – provocări pe care această disciplină ni le aduce în atenţie.

Ai participat deja la diferite concursuri de matematică şi suntem încântaţi că te afli printre cei fruntaşi; în încercarea de „a şti mai multe şi mai bine, a gândi frumos şi profund” toţi sunt câştigători.

Pentru a pătrunde în tainele matematicii ai nevoie de dorinţă, răbdare, iniţiativă şi multă muncă. Trebuie să ai curaj, să încerci şi iarăşi să încerci, să nu renunţi, deoarece, uneori, drumul spre succes, are şi suişuri, dar şi coborâşuri, ocolişuri.

Pentru a obţine performanţă mai ai nevoie de ceva: trebuie să ştii să prezinţi în scris sau verbal ceea ce gândeşti pentru soluţionarea problemelor.

Ai văzut că temele şi subiectele de la concursuri pot avea grade diferite de dificultate şi necesită volum de muncă diferit.

În acordarea punctajului se ţine cont de aceste aspecte. Pentru a obţine punctaj bun trebuie să scrii toţi paşii parcurşi în rezolvarea problemelor în cauză, să justifici rezultatele, relaţiile, afirmaţiile şi să le ordonezi logic, natural, firesc. Asta înseamnă să redactezi soluţia problemei. Câştigătorii nu sunt prieteni cu expresia „ştiu, dar nu pot să spun”.

Cum învăţăm să redactăm rezolvarea unei probleme? Cu multă răbdare, gândind, înţelegând în detaliu, în profunzime rezolvarea problemei şi apoi scriind-o astfel încât cine citeşte rezolvarea să înţeleagă cu uşurinţă exact ceea ce ai înţeles tu după acel efort de gândire şi analiză. Trebuie să accepţi că poţi greşi, să cauţi atunci cauza, să-ţi completezi cunoştinţele sau să corectezi modul în care ai gândit. Permanent, trebuie să fii conştient de nivelul prestaţiei tale, adică să fii capabil să *autoevaluezi* punctajul pe care îl vei obţine la un test sau la un concurs.

Cunoscând aceste „arme secrete”, cu dorinţă şi perseverenţă, succesul va fi mult mai aproape.

Pentru exemplificare, prezentăm în cele ce urmează, un test însoţit de rezolvarea problemelor şi modul de atribuire a punctajului.

TEST DE EVALUARE – EXEMPLU DE NOTARE

(7p) **1.** Se consideră şirul de numere raţionale: $2,\ -4,\ -2,\ \frac{1}{2}, \ldots$ (al treilea termen este câtul dintre al doilea termen şi primul, al patrulea este câtul dintre al treilea termen şi al doilea, şi aşa mai departe).

a) Scrieţi încă cinci termeni ai şirului.

b) Aflaţi al 2014-lea termen al şirului.

c) Calculaţi suma şi produsul primilor 100 de termeni ai şirului.

(7p) **2.** Fie a, b numere întregi. Arătaţi că:

a) dacă a şi b sunt pare, atunci a^2+b^2 este divizibil cu 4;

b) dacă a şi b sunt impare, atunci a^2+b^2+10 este divizibil cu 4;

c) dacă a şi b sunt de parităţi diferite, atunci a^2+b^2-2013 este divizibil cu 4.

Capitolul I
MULŢIMI DE NUMERE. RADICALI

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1) Dacă $a \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.

2) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

3) Dacă a şi b nu sunt pătratele unor numere raţionale, atunci $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \notin \mathbb{Q}$.

4) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ şi $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow (a \pm b) \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

5) Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ şi $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow ab \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

6) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $\forall a,\ b \geq 0,\ a \geq \sqrt{b}$. (formula radicalilor compuşi).

O noţiune relativ recentă în matematică este noţiunea de *evaluare p-adică* (*p–adic valuation* în limba engleză, *valuation p-adic* în limba franceză). Această noţiune constituie un mijloc sistematic şi adesea eficace pentru utilizarea în toată „puterea" ei a teoremei de descompunere în factori primi. Deşi nu este un panaceu, metoda furnizată de această noţiune se dovedeşte utilă în multe demonstraţii sau rezolvări de probleme de aritmetică. Pentru început avem nevoie de următoarea:

Definiţie: Dacă p este un număr prim, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci evaluarea *p-adică* a numărului n este cel mai mare număr natural k astfel încât $p^k \mid n$. Se va nota $k = v_p(n)$. Cu alte cuvinte $v_p(n)$ este exponentul lui p în descompunerea în factori a numărului n.

EXEMPLE: $v_2(2)=1,\ v_3(27)=3,\ v_5(10)=1,\ v_3(20)=0,\ v_7(49)=2,\ v_2(5!)=3$.

Următoarele proprietăţi ale evaluării *p-adice* sunt uşor de dovedit, este nevoie doar de o oarecare abilitate în manevrarea proprietăţilor cu puteri.

<u>P1.</u> Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi n se descompune sub forma $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, atunci pentru orice $1 \leq i \leq k$, $v_{p_i}(n) = \alpha_i$, iar dacă p este distinct de p_i cu $1 \leq i \leq n$, atunci $v_p(n) = 0$.

EXEMPLE: Dacă $n = 144$, atunci cum $144 = 2^4 \cdot 3^2$ avem $v_2(n) = 4$, $v_3(n) = 2$ şi pentru orice număr prim $p \geq 5,\ v_p(n) = 0$.

<u>P2.</u> Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci $m \mid n$ dacă şi numai dacă $v_p(m) \leq v_p(n)$, pentru orice p număr prim.

<u>P3.</u> Dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru orice număr prim p au loc egalităţile:

(i) $v_p([a,b]) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$

Capitolul IV
INEGALITĂŢI

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1) $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$

3) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

4) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,\ \forall a,\ b > 0$

5) $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ (Inegalităţile generate de medii).

6) $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2$

$\forall\ a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(Inegalitatea lui Cauchy–Buniakovski–Schwarz)
Caz particular:

Pentru $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ şi $b_i = \sqrt{y_i},\ x_i \in \mathbb{R},\ y_i > 0$

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + ... + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2}{y_1 + y_2 + ... + y_n}$$

APLICAŢII:

1. a) Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \frac{1}{2^n + 3} + ... + \frac{1}{2^n + 2^n} > \frac{1}{2}.$$

b) Arătaţi că $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{128} > 1 + \frac{7}{2}.$

Concursul naţional de matematică „Euclid”, 2012

Soluţie:

a) Prima sumă conţine 2^n fracţii şi $\frac{1}{2^n + 1} > \frac{1}{2^n + 2} > \frac{1}{2^n + 3} > ... > \frac{1}{2^n + 2^n}.$

Atunci $\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \frac{1}{2^n + 3} + ... + \frac{1}{2^n + 2^n} > \underbrace{\frac{1}{2^n + 2^n} + \frac{1}{2^n + 2^n} + ... + \frac{1}{2^n + 2^n}}_{2^n \text{ fracţii}}.$

Capitolul VI
TRIUNGHIUL

A. Elemente de tehnică matematică

Soluţionarea problemelor care au configuraţie de bază un triunghi se bazează frecvent pe cazurile de congruenţă ale triunghiurilor şi pe teorema referitoare la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi.

EXEMPLUL 1. În exteriorul triunghiului ABC construim triunghiurile echilaterale ABD şi ACE. Demonstraţi că $[BE] \equiv [CD]$.

Soluţie:

Considerăm triunghiurile ABE şi ACD. Avem $[AB] \equiv [AD]$, $[AC] \equiv [AE]$ şi $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DAC$. Deci $\Delta ADC \equiv \Delta ABE$ conform cazului de congruenţă L.U.L. şi atunci $[BE] \equiv [CD]$.

EXEMPLUL 2. Latura $[AB]$ a triunghiului echilateral ABC se prelungeşte dincolo de B cu segmentul $[BD]$ congruent cu $[AB]$. Demonstraţi că $DC \perp AC$.

Soluţie:

Triunghiul DBC este isoscel. Deoarece $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, atunci $m(\sphericalangle DBC) = 120°$. Deoarece suma măsurilor unghiurilor triunghiului DBC este $180°$, obţinem $m(\sphericalangle BCD) = m(\sphericalangle BDC) = 30°$. Atunci $m(\sphericalangle DCA) = 60° + 30° = 90°$ şi obţinem concluzia.

Uneori putem scurta raţionamentul dacă facem apel la proprietăţi specifice triunghiurilor isoscele, echilaterale sau dreptunghice.

EXEMPLUL 3. Fie triunghiul ABC în care $m(\sphericalangle A) = 40°$. Perpendiculara din B pe bisectoarea unghiului A taie latura AC în E. Calculaţi măsura $\sphericalangle BEC$.

Soluţie:

Notăm cu F intersecţia bisectoarei unghiului A cu dreapta BE. În triunghiul ABE, AF este bisectoare şi înălţime, deci triunghiul ABE este isoscel. Atunci $m(\sphericalangle AEB) = 70°$, deci $m(\sphericalangle BEC) = 110°$.

De asemenea, pot fi folosite proprietăţile liniilor importante în triunghi, cum ar fi:

– punctele de pe mediatoarea unui segment sunt egal depărtate de capetele segmentului;
– punctele de pe bisectoarea unui unghi sunt egal depărtate de laturile acelui unghi;
– linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu a treia latură şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea ei;
– concurenţa mediatoarelor, bisectoarelor, înălţimilor şi respectiv a medianelor unui triunghi şi proprietăţile punctelor de congruenţă.

EXEMPLUL 4. Fie ABC un triunghi dreptunghic. Mediatoarea ipotenuzei BC taie semidreapta $(BA$ în punctul D, astfel încât $A \in (BD)$ şi latura (AC) în F. Demonstraţi că $BF \perp CD$.

Cuprins