Maranda Linț
Dorin Linț
Rozalia Marinescu
Dan Ștefan Marinescu
Mihai Monea
Steluța Monea
Marian Stroe

Matematică de excelență

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

clasa a VIII-a

mate 2000 – excelență

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Capitolul I
MULŢIMEA NUMERELOR REALE

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1. Fie x, y numere reale $y \neq \frac{1}{2}$. Știind că $x \cdot (x-2) = 4y \cdot (y-1)$, arătați că numărul $z = \frac{x-1}{2y-1}$ este întreg.

Soluția I:

$x \cdot (x-2) = 4y \cdot (y-1) \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) - 2(x-2y) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2y)(x+2y-2) = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$ sau $x + 2y - 2 = 0.$

I. Dacă $x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$. Atunci $\frac{x-1}{2y-1} = \frac{2y-1}{2y-1} = 1 \in \mathbb{Z}$, pentru $y \neq \frac{1}{2}$.

II. Dacă $x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow x = -2y + 2$. Atunci $\frac{x-1}{2y-1} = \frac{-2y+2-1}{2y-1} = -1 \in \mathbb{Z}, \forall y \neq \frac{1}{2}$.

În concluzie, dacă sunt verificate condițiile din enunț, numărul z este întreg.

Soluția a II-a: $x \cdot (x-2) = 4y(y-1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 4y^2 - 4y \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4y^2 - 4y + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (2y-1)^2 \Leftrightarrow |x-1| = |2y-1| \Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{2y-1}\right| = 1, \forall y \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2y-1} \in \{-1;\ 1\} \subset \mathbb{Z}.$

2. Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor naturale a și b este 1. Arătați că $\frac{a}{2}$ și $\frac{b}{2}$ sunt pătratele a două numere naturale consecutive.

Soluție: Fie $a > b$. Atunci $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2} + \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b + 2 + 2\sqrt{2b} \Leftrightarrow a - b - 2 = 2\sqrt{2b}.$

Deoarece $a - b - 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2b} \in \mathbb{N}$, deci $b = 2k^2$, $k \in \mathbb{N}$. Obținem $\frac{b}{2} = \frac{2k^2}{2} = k^2$ și
$\frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2b} + b + 2}{2} = \frac{2 \cdot 2k + 2k^2 + 2}{2} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$

3. Fie a, b, α, β numere raționale, $a > 0$, $b > 0$. Arătați că:

a) dacă $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$;

b) dacă $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$;

c) dacă $\left(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Soluție: **a)** $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \in \mathbb{Q}$. Deoarece $(a-b) \in \mathbb{Q}$, rezultă $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) \in \mathbb{Q}$.

Capitolul II
CALCUL ALGEBRIC

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

1. Se consideră numerele reale strict pozitive *x*, *y*, *z*, cu proprietatea $x\cdot y=\frac{z-x+1}{y}=\frac{z+1}{2}$. Arătaţi că unul dintre numere este media aritmetică a celorlalte două.

Soluție: Avem $x\cdot y=\frac{z-x+1}{y}$ și $x\cdot y=\frac{z+1}{2}$, de unde $z=xy^2+x-1$ și $z=2xy-1$. Obținem $xy^2+x=2xy \Leftrightarrow x\cdot\left(y^2-2y+1\right)=0 \Leftrightarrow x\cdot\left(y-1\right)^2=0$. Deoarece $x > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$. Atunci $x\cdot y=\frac{z+1}{2}$ devine $x=\frac{z+1}{2}$ sau $x=\frac{z+y}{2}$, adică *x* este media aritmetică a numerelor *z* și *y*.

2. Fie *a* și *b* numere reale nenule. Dacă $a+\frac{1}{a}=x$, $b+\frac{1}{b}=y$ și $ab+\frac{1}{ab}=z$, arătați că $x^2+y^2+z^2-xyz$ este număr natural.

Soluție: $x^2+y^2+z^2-xyz=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}+a^2b^2+2+\frac{1}{a^2b^2}-$ $-\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)=a^2+b^2+a^2b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2b^2}+6-a^2b^2-1-a^2-$ $-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}-b^2-1-\frac{1}{a^2b^2}=4\in\mathbb{N}$.

3. Fie *a* și *b* numere raționale. Arătați că, dacă $a^3+b^3=2ab$, atunci numărul $1-ab$ este pătratul unui număr rațional.

Soluție: Dacă $b=0$, atunci $a=0$ și $1-ab=1=1^2$. Fie $b\neq 0$. Atunci există $k\in\mathbb{Q}^*$, $b=a\cdot k$ și $a\neq 0$, $a^3+b^3=2ab \Leftrightarrow a^3+a^3k^3=2a^2k \Leftrightarrow a+ak^3=2k \Rightarrow a=\frac{2k}{1+k^3}$ și $b=\frac{2k^2}{1+k^3}$. $1-ab=1-\frac{4k^3}{\left(1+k^3\right)^2}=\frac{1+2k^3+k^6-4k^3}{\left(1+k^3\right)^2}=\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)^2$, deci $1-ab$ este pătratul unui număr rațional.

4. Numerele pozitive *a*, *b*, *c* verifică egalitatea $a^2b+a^2c+2abc=2a^3+b^2c+bc^2$. Arătați că unul dintre ele este media aritmetică sau media geometrică a celorlalte două.

Soluție: Egalitatea se scrie succesiv: $a^2\cdot(b+c)+2abc-2a^3-b^2c-bc^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^2\cdot(b+c)-2a\left(a^2-bc\right)-bc(b+c)=0 \Leftrightarrow (b+c)\left(a^2-bc\right)-2a\cdot\left(a^2-bc\right)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(a^2-bc\right)\cdot(b+c-2a)=0 \;|:(-2) \Leftrightarrow \left(a^2-bc\right)\cdot\left(a-\frac{b+c}{2}\right)=0.$

Capitolul III
FUNCŢII

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Capitolul „Funcții” este unul dintre cele mai ample din cadrul programei de olimpiadă. Tema aceasta se regăsește la toate nivelele începând cu clasa a VII-a și terminând cu clasa a XII-a. Exemplele și problemele care vor urma se vor adresa începătorilor în studiul funcțiilor. De altfel, primele exemple sunt construite doar pe baza definiției.

EXEMPLUL 1: Fie $f:\{1,2,3,...,99,100\}\to\{-1,0,1\}$ o funcție cu proprietatea:

$$f(0)\cdot f(1)\cdot...\cdot f(99)\cdot f(100)\neq 0.$$

Demonstrați că $f(0)+f(1)+...+f(99)+f(100)\neq 0.$

Soluție: Ipoteza $f(0)\cdot f(1)\cdot...\cdot f(99)\cdot f(100)\neq 0$ conduce la concluzia că numerele $f(0), f(1), f(2),..., f(100)$ sunt nenule. Din definiția funcției *f* obținem că $f(0)$, $f(1), f(2),..., f(100)\in\{-1,1\}$ și atunci suma cerută este nenulă, fiind o sumă de 101 numere impare.

EXEMPLUL 2: Fie funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Q},\ f(x)=\dfrac{x+1}{x}$. Demonstrați că numărul:

$A=f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot...\cdot f(120)$ este număr natural pătrat perfect.

Soluție: Avem succesiv:

$$A=f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot...\cdot f(120)=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{120}{119}\cdot\frac{121}{120}=121=11^2.$$

EXEMPLUL 3: Demonstrați că nu există funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relaţia:

$$f(x)+f(2-x)=x+1, \text{ pentru orice } x\in\mathbb{R}.$$

Soluție: Ideea este de a particulariza pe *x* pentru a se obține relații care contrazic definiția noțiunii de funcție. Dacă ar exista o astfel de funcție, am putea alege $x=0$ și obținem $f(0)+f(2)=1$. Apoi particularizarea $x=2$ conduce la $f(2)+f(0)=3$. Cele două egalități nu pot fi simultan adevărate, deci nu există o funcție care să verifice proprietatea din enunț.

EXEMPLUL 4: Fie o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care verifică relația $f(f(x))=x^2-4x+6$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Calculați $f(2)$.

Soluție: Tehnica de calcul următoare este extrem de eficientă pentru a obține și alte relații pornind de la ipoteză. Din $f(f(x))=x^2-3x+4$ deducem:

$f(f(f(x)))=f(x^2-3x+4)$.

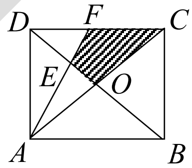
Capitolul XI
CORPURI GEOMETRICE, ARII ŞI VOLUME

A. ELEMENTE DE TEHNICĂ MATEMATICĂ

Acest capitol este unul dintre cele mai vaste din programa de olimpiadă specifică clasei a VIII-a. Problemele pot fi împărţite în câteva categorii principale:

- calcule de arii laterale şi volume pentru diferite corpuri geometrice;
- calculul ariei diferitelor tipuri de secţiuni;
- probleme cu distanţe soluţionate cu ajutorul formulelor de arie şi volum;
- probleme de algebră modelate pe suport geometric.

EXEMPLUL 1: Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată de volum 36 cm^3. Se notează cu O centrul bazei $ABCD$ şi cu F mijlocul muchiei $[CD]$. Fie $\{E\} = AF \cap BD$. Calculaţi volumul piramidei $VOEFC$.



Soluţie: Piramidele $VABCD$ şi $VOEFC$ au înălţime comună pe VO, deci raportul volumelor este egal cu raportul ariilor bazelor lor. În triunghiul ACD, E este centru de greutate, deci:
$\mathcal{A}_{AED} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{6}\mathcal{A}_{ABCD}$. Apoi $\mathcal{A}_{EDF} = \mathcal{A}_{AEO} = \frac{1}{6}\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{12}\mathcal{A}_{ABCD}$.

Deducem că $\mathcal{A}_{CFEO} = \mathcal{A}_{ABCD} - \frac{1}{6}\mathcal{A}_{ABCD} - 2\cdot\frac{1}{12}\mathcal{A}_{ABCD} - \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{6}\mathcal{A}_{ABCD}$. Deducem că $\mathcal{V}_{VEOFC} = \frac{1}{6}\mathcal{V}_{VABCD} = 6$ cm^3.

EXEMPLUL 2: Considerăm tetraedrul regulat $ABCD$ de latură 1. Fie $M \in [AC]$ astfel încât $MC = 2AM$. Prin M construim un plan paralel cu dreptele AB şi CD. Acesta intersectează muchiile $[BC]$, $[BD]$ şi $[AD]$ în punctele N, P şi respectiv Q. Calculaţi aria secţiunii $MNPQ$.

Soluţie: Din ipoteză deducem că MN şi PQ sunt paralele simultan cu AB, iar NP şi MQ sunt paralele cu CD. Atunci $MNPQ$ este paralelogram. Cum într-un tetraedru regulat muchiile opuse sunt perpendiculare, obţinem că $MNPQ$ este dreptunghi. Deoarece $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$, obţinem că $\frac{MQ}{CD} = \frac{1}{3}$, deci $MQ = \frac{1}{3}$. Analog obţinem $MN = \frac{2}{3}$ şi atunci $\mathcal{A}_{MNPQ} = \frac{2}{9}$.

EXEMPLUL 3: Fie $ABCD$ un tetraedru regulat şi M un punct interior. Demonstraţi că suma distanţelor de la M la feţele tetraedrului este constantă, indiferent de poziţia punctului M.

Soluţie: Fie d_A, d_B, d_C şi d_D distanţele de la punctul M la feţele (BCD), (ACD), (ABD) şi respectiv (ABC). Folosind formula $\mathcal{V}_{MBCD} = \frac{1}{3}d_A \cdot \mathcal{A}_{BCD}$ şi analoagele, obţinem

TESTE FINALE

TESTUL 1

(2p) **1. a)** Se consideră numerele reale $x, y, u, v > 0$. Demonstraţi că:

$$\frac{u}{x}+\frac{v}{y}\geq\frac{(u+v)^2}{ux+vy}.$$

(5p) **b)** Fie a, b, c cifre nenule. Demonstraţi că $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}+\frac{\overline{bc}}{\overline{cb}}+\frac{\overline{ca}}{\overline{ac}}\geq 3$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ astfel încât $\left(a+2\sqrt{a}\right)\in\mathbb{Q}$ şi $a^2\in\mathbb{Q}$.

(2p) **a)** Arătaţi că $\left(a\sqrt{a}+a\right)\in\mathbb{Q}$ şi $a\in\mathbb{Q}$.

(5p) **b)** Găsiţi un număr $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\left(a+2\sqrt{a}\right)\in\mathbb{Q}$ şi $a^2\notin\mathbb{Q}$.

(7p) **3.** Fie n puncte în spaţiu astfel încât oricare patru să formeze un tetraedru de volum cel mult 1. Arătaţi că există un tetraedru de volum cel mult 27 care să conţină în interior toate cele n puncte.

(7p) **4.** $ABCD$ este un pătrat şi $E\in(BC)$, $F\in(CD)$ astfel încât $m(\sphericalangle EAF)=45°$. Fie $BD\cap AE=\{Q\}$, $BD\cap AF=\{P\}$, $FQ\cap PE=\{S\}$, $AS\cap FE=\{T\}$ şi $MA\perp(ABC)$. Demonstraţi că $MT\perp FE$.

Timp de lucru: 150 de minute.

TESTUL 2

(3p) **1. a)** Fie a şi b două numere reale pozitive. Arătaţi că:

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}.$$

(4p) **b)** Arătaţi că, pentru orice număr natural n, are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(7p) **2.** Determinaţi numerele prime p pentru care numărul $2\cdot p^2+1$ este număr prim.

(7p) **3.** Se consideră punctele necoplanare P, A, B, C, D. Dacă $PB\perp CD$, $PD\perp BC$, $PA\perp BC$, arătaţi că picioarele perpendicularelor din A şi C pe BD coincid.

4. Fie ABC un triunghi. Cercul care trece prin vârful B şi este tangent în A laturii $[AC]$ intersectează latura $[BC]$ în D. Cercul care trece prin C şi este tangent în A laturii $[AB]$ intersectează latura $[BC]$ în E. Arătaţi că:

(3p) **a)** $BC^2=AB^2+AC^2\pm BC\cdot DE$;

(4p) **b)** $AD^2=AE^2=DC\cdot BE$.

Timp de lucru: 150 de minute.

CUPRINS

TESTE INIŢIALE 5
Capitolul I. MULŢIMEA NUMERELOR REALE 10
Capitolul II. CALCUL ALGEBRIC 26
Capitolul III. FUNCŢII 46
Capitolul IV. ECUAŢII ŞI INECUAŢII 63
Capitolul V. INEGALITĂŢI 83
Capitolul VI. CERCUL, POLIGOANE ÎNSCRISE, POLIGOANE CIRCUMSCRISE 106
Capitolul VII. PARALELISM ÎN SPAŢIU 127
Capitolul VIII. PERPENDICULARITATE ÎN SPAŢIU 148
Capitolul IX. LOCURI GEOMETRICE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAŢIU 180
Capitolul X. COLINIARITATE, CONCURENŢĂ, COPLANARITATE 192
Capitolul XI. CORPURI GEOMETRICE, ARII ŞI VOLUME 209
Capitolul XII. INEGALITĂŢI GEOMETRICE ÎN SPAŢIU 244
TESTE FINALE 267
BIBLIOGRAFIE 284