CORINT

Conform modelelor stabilite de MEC

BAC 2021

MATEMATICĂ M1

Coordonator Radu Gologan

Mihaela Berindeanu
Nicoleta Agenna Ionescu Mazilu
Ovidiu Șontea
Gabriel Vrînceanu

Cuvânt-înainte

Pregătirea în vederea susținerii examenului de Bacalaureat la matematică este diferită de cea pentru celelalte materii ale acestei probe a examenului de maturitate. În primul rând, datorită cantității extrem de mari de informație pe care elevul trebuie să o dobândească pe parcursul tuturor anilor de școală, care adesea este transmisă din păcate rigid și formal, fără suport intuitiv. Aceasta face de multe ori ca întreaga matematică studiată în liceu să pară pentru mulți elevi, un fapt nedrept, neatrăgătoare.

În al doilea rând, pentru că înțelegerea faptului matematic și al utilității acestuia în dezvoltarea gândirii și a modelării realității, nu se poate face fără exercițiu intens și fără un efort intelectual. Aceasta înseamnă rezolvarea cu creionul în mână, în anii de liceu, a sute de exerciții și probleme. Evident că profesorul de la clasă are, în acest sens, rolul cel mai important, prin exemple explicate și teme judicios alese. Este însă esențial ca elevul să lucreze cât mai mult singur, să-și descopere astfel punctele slabe și să înțeleagă în final fenomenele și metodele matematice studiate.

Aveți în față o colecție de exerciții care își propune să aducă o noutate pe piața auxiliarelor de matematică și anume prezentarea graduală ca dificultate și ca finalitate așteptată a unei suite de teste, utile pentru examenul de bacalaureat și pentru pregătirea treptată, de-a lungul claselor a XI-a și a XII-a.

Volumul conține două părți. În prima parte există două secțiuni cu teste pentru pregătirea elevilor pe parcursul claselor a XI-a, respectiv a XII-a. Consider aceste teste importante pentru profesorii de liceu, care vor avea un material bun pentru evaluarea continuă pe parcursul anului școlar. Partea a doua este dedicată strict testelor care urmăresc îndeaproape structura celor pentru examenul de matematică la Bacalaureat, singura diferență fiind că acestea sunt clasificate în trei module A, B, respectiv C. Testele din modulul A sunt concepute de autori astfel încât înțelegerea lor ar trebui să asigure nota minimă 6 la examen. Analog, modulul

B se referă la nota minimă 8, iar C la o notă între 9,50 și 10. Toate testele sunt însoțite de răspunsuri și soluții complete.

Autorii sunt profesori cu o bogată experiență de predare la licee de excelență, cu rezultate excepționale ale elevilor dumnealor la examene și chiar la olimpiade. Mulți dintre acești elevi mi-au fost studenți de elită la Facultatea de Automatică și Calculatoare. În plus, au și o îndelungată experiență ca autori de teste și probleme pentru examene și concursuri.

Dragi elevi, dragi dascăli matematicieni, recomand cu căldură acest minunat auxiliar.

Prof. Dr. Radu Gologan
Președintele Societății de Științe Matematice din România

EXAMENUL DE

BACALAUREAT

Teste de simulare BAC pentru clasa a XI-a

Teste de simulare BAC pentru clasa a XII-a

Egalitatea nu există decât în matematică.

Mihai Eminescu

Teste de SIMULARE BAC pentru clasa a XI-a

Se acordă 10 puncte din oficiu

Test 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $\frac{3+i}{3-i}$.

5p **2.** Soluțiile ecuației $x^2-(2m+1)x+3m+5=0$ sunt x_1 și x_2, iar m este un număr real. Arătați că $3(x_1+x_2)-2x_1x_2+7=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 4x+\log_2 x=4$.

5p **4.** Determinați câte numere pare de 3 cifre se pot forma folosind elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+5\vec{j}$ și $\overrightarrow{AC}=$ $=(m+2)\vec{i}+(4m-1)\vec{j}$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m astfel încât $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Știind că $\operatorname{tg} a=\frac{2}{3}$, arătați că $\frac{3\sin a+\cos a}{3\sin a-\cos a}=3$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & 3\\ x^3 & y^3 & 27\end{vmatrix}$, unde x, y sunt numere reale.

5p a) Arătați că $D(0,1)=24$.

5p b) Arătați că $D(x,y)=(y-x)(3-x)(3-y)(x+y+3)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

5p c) Demonstrați că numărul $D(x,y)$ este divizibil cu 6 pentru orice numere întregi x,y.

2. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+1 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Calculați $A(2)-A(1)$.

5p b) Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b+2ab)$, pentru orice numere reale a, b.

5p c) Determinați numerele naturale pentru care $A(a)A(a+5)=A(18a+1)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ și, respectiv, șirul de numere reale$(x_n)_{n\geq 1}$, având termenul general $x_n = f(n)$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1)\ln\frac{x_n}{x_{n+1}}$.

2. Se consideră funcția:

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + a, \text{ pentru } x \leq 2 \\ x^2 + (a^2 - a)x, \text{ pentru } x > 2 \end{cases}$, unde a este un număr real.

5p a) Determinați numerele reale a pentru care funcția f este continuă în $x = 2$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

5p c) Pentru $a = 2$, arătați că ecuația $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1, 0)$.

Test 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left|6\log_3\sqrt[3]{243} - \sqrt[4]{16}\right|$.

5p **2.** Fie funcțiile $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x + 3,\ g(x) = -2x - 3$. Aflați punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(5^x - 5)\left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cel puțin un număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4, 3), B(6, -3), C(-2, 5)$. Determinați ecuația medianei triunghiului ABC dusă din A.

5p **6.** Arătați că $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$

5p a) Calculați σ^{-1} (permutarea inversă permutării σ).

5p b) Arătați că permutarea σ este impară.

5p c) Dacă $\omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, rezolvați în S_4 ecuația $\sigma x = \omega$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\right\}$.

5p a) Arătați că $A, I_2 \in M$.

5p b) Arătați că, dacă $X \in M$, atunci există numerele reale a și b astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p c) Arătați că, dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 3}$.

5p a) Calculați $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Arătați că $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2^x + 3x + m, & \text{pentru } x \le 0 \\ \dfrac{\sin 4x}{2x}, & \text{pentru } x > 0 \end{cases}$,

unde $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 2$.

5p b) Determinați numărul real m pentru care funcția f este continuă în $x = 0$.

5p c) Pentru $m = 1$ arătați că ecuația $f(x) = 0$ admite o rădăcină negativă, care nu aparține mulțimii numerelor întregi.

EXAMENUL DE BACALAUREAT

Teste BAC de tip A
(teste de inițiere)

Teste BAC de tip B
(teste de aprofundare)

Teste BAC de tip C
(teste pentru nota 10)

Teste BAC de tip A
(teste de inițiere)

Se acordă 10 puncte din oficiu

TEST 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați $\left[\dfrac{2}{3\sqrt{2}-4}\right]$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$. Calculați valoarea sumei $S = f(1) + f(2) + \ldots + f(20)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + 2\log_4 x + 3\log_8 x = 12$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,1,2,3\} \to \{2,3,4,5,6\}$ cu proprietatea că $f(0)$ este număr par.

5p **5.** Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 5$, $AC = 13$. Calculați $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculați valoarea sumei $\cos 105^\circ + \sin 15^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - ay + z = 1 \\ 3x + y - 2z = b \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită soluția $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$.

5p b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p c) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 16X + 15 \in \mathbb{R}[X]$.

5p a) Calculați restul și câtul împărțirii polinomului la $X^2 - 2X + 3$.

5p b) Arătați că polinomul nu are nicio rădăcină reală.

5p c) Calculați suma modulelor rădăcinilor polinomului.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

5p a) Verificați dacă $f'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$.

5p c) Arătați că $e^{x^2-2} \geq x^2 - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_3^4 \dfrac{x^n}{x^2+16}\, dx$.

5p a) Arătați că $I_1 = \ln\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$.

5p b) Determinați I_2.

5p c) Demonstrați că $I_{n+2} + 16 I_n = \dfrac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

TEST 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația $r = 3$ și $a_5 + a_9 = 38$. Aflați termenul a_1.

5p **2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + 2\sin x$ este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{2,3,4,5\} \to \{3,4,5,6\}$ cu proprietatea $f(2) + f(3) = 7$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(3,5)$, $A(2,7)$ și $B(5,3)$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x - \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 3x-1 & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ x & 0 & 3x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

5p a) Demonstrați că $\det(A(1)) = 1$.

5p b) Demonstrați că $A(x) + A(1-x) = 2A\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p c) Determinați numărul real x astfel încât matricea $A(x)$ să fie inversabilă.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X + a$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p a) Pentru $a = 4$, arătați că restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

5p b) Calculați $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2$.

5p c) Determinați numărul real a astfel încât toate rădăcinile polinomului f să fie numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$.

5p a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x} - x - 1}{\sqrt{x^2+2x}}, \forall x \in (0, \infty)$.

5p b) Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $F, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x+5)e^x$ și $f(x) = (x+6)e^x$.

5p a) Verificați dacă F este o primitivă a funcției f.

5p b) Calculați $\int_0^1 \dfrac{F(x) - f(x)}{e^x + 2}\, dx$.

5p c) Calculați $\int_1^e [f(\ln x) - 6x]\, dx$.

TEST 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați suma $S = 3 + 8 + 13 + \ldots + 248$.

5p **2.** Se consideră ecuația $x^2 - (2m+1)x + 3m + 2 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Determinați numărul real m astfel încât $5(x_1 + x_2) = 3x_1x_2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_2[\log_3(x+2)] < 1$.

Teste BAC de tip B
(teste de aprofundare)

Se acordă 10 puncte din oficiu

TEST 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Dacă $z \in \mathbb{C}$ și $4z + 3\bar{z} = 28 + 3i$, calculați $|z|$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta $y = 3x + 2$ și parabola $y = x^2 + 7x + 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+3} + 2^{3-x} = 20$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând aleatoriu un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, acesta să fie multiplu de 2 sau de 3.

5p **5.** Dacă ecuațiile dreptelor d_1 și d_2 sunt $mx + 4y - 5 = 0$, respectiv $x - 8y + 13 = 0$, determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele să fie paralele.

5p **6.** Știind că ctg $a = 4$ și ctg $b = 5$, calculați tg$(a + b)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali:
$$\begin{cases} x - y + mz = m + 2 \\ mx + y - mz = m + 3 \\ 2x + my + z = 5 \end{cases}.$$

5p a) Calculați determinantul matricei A a sistemului.

5p b) Arătați că, $\forall m \in \mathbb{R}$, rang $A \geq 2$.

5p c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, $m \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile x_1, x_2 și x_3.

5p a) Determinați valoarea lui m astfel încât f să se dividă cu $X - 1$.

5p b) Determinați valoarea lui m astfel încât produsul a două dintre rădăcinile polinomului să fie 2.

5p c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2x_3 + 12 = 0$ pentru orice valoare a parametrului real m.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-\infty, -2] \cup (3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

5p a) Calculați $f'(x)$.

5p b) Calculați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 7$ situat pe graficul funcției f.

5p c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{4x+200}$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $I_n = \int_1^e (x+1)\ln^n x\, dx$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

5p a) Arătați că $I_1 = \frac{e^2+5}{4}$.

5p b) Arătați că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.

5p c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

TEST 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{2}$, $\log_5 4$, $\sqrt[4]{3}$.

5p **2.** Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât parabola asociată funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 9$ să fie tangentă la axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+2) + \lg(5-2x) = 1$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aflați care este probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din mulțimea $A \times A$, să fie adevărată relația $a + b \leq 4$.

5p **5.** În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(4, 2)$, $B(-1, 3)$ și $C(2, -1)$. Calculați lungimea înălțimii din A a ΔABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $AB = 13$, $AC = 14$, $BC = 15$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} x & x+2 & x+4 \\ y & y+2 & y+4 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, cu $x, y \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că rang $A \geq 2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

5p b) Arătați că $\det A = 2(x - y)(x - 1)$.

5p c) Calculați inversa matricei A pentru $x = -2$, $y = 2$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + 4$, $f \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p a) Determinați m, știind că $(X - 1) \mid f$.

5p b) Calculați $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)$, în funcție de parametrul real m.

5p c) Aflați valorile lui m pentru care f are o rădăcină dublă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 2}$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei la graficul funcției f la $-\infty$.

5p b) Arătați că $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{(x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

5p c) Arătați că funcția este convexă pe intervalul $(-2, +\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_n^{n+1} \dfrac{3x + 1}{x}\, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Arătați că $I_n = 3 + \ln \dfrac{n + 1}{n}$.

5p b) Studiați monotonia șirului $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} (n + 2)(I_n - 3)$.

TEST 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$. Știind că $a_5 + a_{11} = 20$, calculați termenul a_8.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = 3x + 5$. Rezolvați ecuația $(f \circ g)(x) = 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x - 5} + 5 = x$.

5p **4.** Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinați numărul funcțiilor strict crescătoare $f : A \to B$.

5p **5.** Fie punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 3)$. Determinați cosinusul unghiului format de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

Teste BAC de tip C
(teste pentru nota 10)

Se acordă 10 puncte din oficiu

TEST 1

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $\frac{5-3i}{1+i} = a + bi$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2^{x+3} - 16$ cu axele de coordonate.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, extrăgând aleatoriu un număr din mulțimea numerelor naturale de 3 cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3), B(4,7), C(-2,5)$. Determinați ecuația dreptei paralele cu BC, dusă prin mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Determinați $x \in (0,\pi)$ pentru care $\cos^2 x + 2\sin x = \frac{7}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & -a & 1 \\ -a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ cu, $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $\det(A(a)) = (a-2)(a+1)^2$.

5p b) Determinați elementele matricei $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5p c) Determinați numerele întregi a și b pentru care suma elementelor matricei $A(a) \cdot A(b)$ este 3.

2. Fie $m, n \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - 5X^2 + mX + n$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p a) Determinați m și n astfel încât $x_1 = 1 + i$.

5p b) Determinați m și n astfel încât polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

5p c) Pentru $m = 12$ și $n \in \mathbb{R}$, arătați că polinomul admite cel mult o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-\sqrt{3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5p b) Determinați imaginea funcției.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(f(n+1)-f(n))$.

2. Se consideră funcția $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

5p a) Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $[0, \infty)$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.

TEST 2

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $1+i$ este o soluție a ecuației $x^2-2x+2=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a^2-9)x+2019$ să fie constantă.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-1} < \left(\frac{2}{5}\right)^{-5x+7}$.

5p **4.** Determinați numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{100}$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$, $C(3,11)$ și $D(\alpha,\beta)$. Determinați coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie un paralelogram.

5p **6.** Fie ΔABC cu $AB=2$, $AC=4$, $BC=2\sqrt{6}$. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix}$, cu a, b numere reale.

5p a) Arătați că $D(3,4) = 48$.

5p b) Arătați că $D(a,b) = (a-1)(b-1)(b-a)(a+b+1)$.

5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(\log_2 x, 3) = 0$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și rădăcinile x_1, x_2, x_3.

5p a) Aflați a, b, c astfel încât $x_1 = x_2 = 2$ și $x_3 = -1$.

5p b) Arătați că, dacă polinomul admite rădăcina $2+\sqrt{3}$, atunci polinomul f admite o rădăcină rațională.

5p c) Arătați că, dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $f(1) = 2017$ și $f(2) = 2019$, atunci f nu are rădăcini întregi.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - 2x + 1$.

5p a) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f la $-\infty$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul cu abscisa $x_0 = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) - n^2 - 2n\right]$.

2. Fie funcția $f:(-3,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 x \cdot f(x)\, dx = 3 - 2\sqrt{2}$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot \arcsin\frac{x}{3}\, dx$.

5p c) Calculați $\int_0^1 e^x[f(x) + f'(x)]\, dx$.

TEST 3

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi modulul numărului complex $z = (1-i)^6 \cdot (1+i)^4$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a-x) = f(a+x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x} + 2 = 3^{x+1}$.

Cuprins