c o l e c ț i a

concursuri
școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : olimpiade și concursuri școlare : clasele IX-XII : 2018-2019 / Gheorghe Căiniceanu (coord.), Emilia-Ștefania Răducan, Carmen-Victorița Chirfot, ... - Pitești : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-3112-1

I. Căiniceanu, Gheorghe
II. Răducan, Emilia-Ștefania
III. Chirfot, Carmen-Victorița

51

GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
MARIANA DRAGA-TĂTUCU, ELENA RÎMNICEANU,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, LEONARD GIUGIUC,
DANIEL STRETCU, DENISA-NICOLETA NECIU, VLAD LUNGU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2018-2019

Editura Paralela 45

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Arad

9.O.1. Se dau punctele fixe A, B şi punctul M exterior dreptei AB. Arătaţi că rezultanta vectorilor $2\overrightarrow{MA}$ şi $5\overrightarrow{MB}$ trece printr-un punct fix.

9.O.2. Numerele reale strict pozitive verifică relaţiile: $a = mx$, $b = ny$, $c = pz$. Arătaţi că, dacă tripletele a, b, c şi x, y, z sunt progresii geometrice, iar tripletul m, n, p este progresie aritmetică, atunci $m = n = p$.

9.O.3. Arătaţi că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le 2 .$$

9.O.4. Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Gazeta Matematică nr. 9/2018

Argeș

9.O.5. Arătaţi că numărul $A = 3\underbrace{99...9}_{2018 \text{ cifre}}76\underbrace{00...0}_{2018 \text{ cifre}}56$, $n \in \mathbb{N}$, se poate scrie ca suma pătratelor a patru numere naturale pare consecutive.

Adrian Gobej

9.O.6. Arătaţi că $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^4}\right) < \frac{9}{4}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Silviu Graure

9.O.7. Fie x număr real şi a, b, p numere naturale nenule, $(a, b) = 1$, astfel încât $1 + x + x^2 + ... + x^n \neq$ $\neq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că, dacă $(1 + x + x^2 + ... + x^n)^a \in \mathbb{Q}$ şi $(1 + x + x^2 + ... + x^n)^b \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \{p, p + 1\}$, atunci $x \in \mathbb{Q}$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

9.O.8. a) Demonstraţi că două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

b) În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN. Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

Bihor

9.O.9. Fie x, y, $z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Demonstrați inegalitățile următoare:

a) $x + y + z \geq 3$;

b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 \geq 12$.

9.O.10. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2a_3}} + ... + \sqrt{1 + \frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n \geq 2.$$

9.O.11. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează (a doua oară) BC, CA și AB, respectiv, în punctele A_2, B_2 și C_2. Arătați că:

a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;

b) dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

9.O.12. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD. Demonstrați că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.

Botoșani

9.O.13. Arătaţi că, dacă numărul real a satisface condiţia $\{a\} = \frac{1}{a}$, atunci a este iraţional.

9.O.14. Dacă x_1, x_2, ..., x_n sunt numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{x_1 + 2019} + ... + \frac{1}{x_n + 2019} = \frac{1}{2019}$, atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \geq (n - 1)^n \cdot 2019^n$.

9.O.15. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P, Q, R, S astfel încât $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{BN} = p\overrightarrow{NR}$ şi $\overrightarrow{CP} = p\overrightarrow{PS}$, unde $k, p \in \mathbb{R}$. Arătaţi că triunghiurile ABC, MNP şi QRS au acelaşi centru de greutate.

9.O.16. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu unghiurile B şi D congruente şi M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD, respectiv AD, astfel ca $BM = DQ$, $BN = PD$. Dacă R, S, T sunt mijloacele segmentelor MQ, BD, respectiv NP, demonstraţi că:

a) bisectoarele unghiurilor A şi C sunt paralele;

b) R, S şi T sunt coliniare.

Brașov

9.O.17. Determinaţi numerele reale x pentru care $x \cdot [x] = \{x\}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

9.O.18. În planul patrulaterului convex $ABCD$ se consideră un punct O. Fie G punctul din plan astfel încât $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

a) Fie E şi F mijloacele laturilor $[AB]$ şi, respectiv, $[CD]$ ale patrulaterului. Arătaţi că $G \in EF$.

b) Arătaţi că orice dreaptă care trece prin G împarte patrulaterul $ABCD$ în două figuri geometrice cu arii egale dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Cătălin Ciupală

9.O.19. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $|x - a| + |x - b| \geq |a - b|$, pentru orice număr real x.

b) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - n|$, când x parcurge mulţimea numerelor reale.

Aurel Bârsan

9.O.20. Fie $a, b, c \geq 0$.

a) Demonstraţi inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

b) Presupunem $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Arătaţi că:

i) $a + b + c \leq 3$;

ii) $ab + bc + ac \leq 3$.

Romeo Ilie

Brăila

9.O.21. Pentru orice numere reale pozitive a, b, c, arătaţi că:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

9.O.22. Arătaţi că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 9, pentru orice număr natural n.

Florin Rotaru

9.O.23. Demonstraţi că $\left(\frac{1}{3} - x\right)(x-1) \leq [x]^2 + \{x\}^2$, pentru orice număr natural n.

Valentin Florin Damian

clasa a X-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Arad

10.O.1. Se dau numerele: $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$, $y = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a) Determinaţi $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x = a + \sqrt{2}$.

b) Arătaţi că $x + y \in \mathbb{N}$.

10.O.2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z_2 + z_3 \neq 0$ și $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_2 + z_3| = |z_1|$. Calculați valoarea expresiei $\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}$.

10.O.3. Se consideră inegalitatea $\log_{\frac{a}{a+1}}(2+x^2) > 1$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați inecuația care se obține pentru $a = -3$.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea dată este adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

10.O.4. Rezolvați ecuația $(\log_5 x) \cdot \log_4 (27 - x) = 1$.

Argeș

10.O.5. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $1 + 2^{[3x]} = 3^{[2x]}$. (Prin $[x]$ se înţelege partea întreagă a numărului x.)

Supliment Gazeta Matematică nr. 4/2013

10.O.6. Fie $a, b, c, d > 1$ cu $abcd = 16$. Demonstraţi că:

$$\log_{ab}(a+b) + \log_{bc}(b+c) + \log_{cd}(c+d) + \log_{da}(d+a) \geq 4.$$

Gazeta Matematică nr. 2/2018

10.O.7. Fie $a, b, c > 0$ cu $abc = 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

$$\frac{1}{(a^x+b^x)^3+4} + \frac{1}{(b^x+c^x)^3+4} + \frac{1}{(c^x+a^x)^3+4} = \frac{1}{4}.$$

Marin Chirciu

10.O.8. Se consideră punctele A, B, C, D cu afixele $z_A = -4 + i$, $z_B = 4 - 3i$, $z_C = 3 + i$, $z_D = -1 + 3i$. Fie M, N mijloacele segmentelor AB, CD şi $P \in AD \cap BC$. Demonstraţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

Marian Teler

Bihor

10.O.9. a) Arătați că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < \frac{5}{3}$.

b) Determinați numărul natural n pentru care $n < \log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 6 + \log_6 8 < n + 1$.

10.O.10. Determinați numerele reale $a \leq 1$ și $b > 0$, pentru care ecuația

$$\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \frac{x^2+b+1}{\sqrt{x^2+b}}$$

are soluții reale.

10.O.11. Considerăm familia de funcții $f_\alpha : \mathbb{N} \to \Gamma$, $f_\alpha(n) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Demonstrați că f_α nu este surjectivă, pentru nicio valoare reală a lui α.

b) Demonstrați că oricare ar fi $m \in \mathbb{N}^*$, există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât imaginea funcției f_α să aibă m elemente.

c) Demonstrați că oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, funcția f_α este sau injectivă, sau periodică.

10.O.12. Considerăm triunghiul ABC cu vârfurile de afixe a, b, c, cu $|a| = |b| = |c| = R$. Înălțimea dusă din vârful A intersectează cercul circumscris triunghiului în punctul D, de afix d.

a) Exprimați d în funcție de a, b, c.

b) Fie mulțimea $\mathscr{R}_n = \left\{ z_k = R\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \middle| \, 0 \leq k \leq n-1 \right\}$, unde $n \geq 5$ este impar și fie $k, j, l \in \{0, 1, ..., n-1\}$ fixate, două câte două distincte, astfel încât $a = z_k$, $b = z_j$, $c = z_l$. Este posibil ca d să fie element al mulțimii $\mathscr{R}_n$? Justificați răspunsul.

Botoșani

10.O.13. Fie $a, b \in \mathbb{C}$, cu $b \neq 0$. Dacă ecuaţia $x^2 + ax + b^2 = 0$ are ambele rădăcini de acelaşi modul, arătaţi că $\frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{R}$.

Gazeta Matematică nr. 12/2018

10.O.14. a) Arătaţi că, dacă $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y \in \mathbb{Q}$ şi $xy \in \mathbb{Q}$, atunci pentru $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ avem $x^n + y^n \in \mathbb{Q}$.

b) Dacă $n \geq 2$ este un număr natural dat, arătaţi că nu există a iraţional astfel încât numărul

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{a^2-1}} + \sqrt[n]{a-\sqrt{a^2-1}}$$

să fie raţional.

10.O.15. În planul complex vom nota cu O originea şi cu z_M afixul unui punct oarecare M.

a) Considerând triunghiul isoscel AOB cu $AO = BO$ şi m($\sphericalangle AOB$) = α, arătaţi că:

$$z_A = z_B(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ sau } z_B = z_A(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

b) Dacă triunghiul RST este isoscel cu $RS = ST$ şi m($\sphericalangle RST$) = α, atunci demonstraţi că:

$$z_R - z_S = (z_T - z_S)(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ sau } z_T - z_S = (z_R - z_S)(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

c) Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex se construiesc în afara acestuia pătratele cu centrele M, N, P, respectiv Q. Arătaţi că $MP \perp NQ$ şi $MP = NQ$.

10.O.16. Rezolvaţi în mulţimea $(-1, \infty)$ ecuaţia $(x^2 + 4x + 3)^x + (2x + 4)^x = (x^2 + 4x + 5)^x$.

Gheorghe Lobonț, *Gazeta Matematică* nr. 11/2018

Brașov

10.O.17. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, cu proprietatea că $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| = 1$. Determinaţi toate numerele $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $z_1^n = z_2^n$.

Romeo Ilie

10.O.18. Fie $x_1, x_2, ..., x_n \in [2, 5]$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\log_{x_1}(7x_2 - 10) + \log_{x_2}(7x_3 - 10) + ... + \log_{x_n}(7x_1 - 10) \geq 2n.$$

Aurel Aldea

10.O.19. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{3^x}\right) = \frac{1}{2 \cdot 15^x + 1}$.

Ioana Mașca

10.O.20. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{1 - x^2} = 3x - 4x^3$.

Brăila

10.O.21. Considerăm un număr real pozitiv fixat a. Arătaţi că toate numerele complexe z ce au $\operatorname{Re} z \geq a$ verifică inegalitatea $\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{a}\right| < \frac{2}{a}$.

10.O.22. Rezolvaţi ecuaţia $x^3 - 6 = 11\sqrt[3]{6 + 11x}$.

Roxandra Murea

10.O.23. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$. Demonstraţi că $\log_{yz^2} x + \log_{zx^2} y + \log_{xy^2} z \geq 1$.

Carmen Botea și Viorel Botea

10.O.24. Rezolvaţi ecuaţia $2019^{x^2 - 2019x} + \frac{x^2 - 2019x}{2019^x} = 1$.

Mihaela Florina Giurcă

București

10.O.25. Determinați numerele reale x și y știind că $3^x + 3^y = 30$ și $\log_3 x - \log_3 y = -1$.

CUPRINS