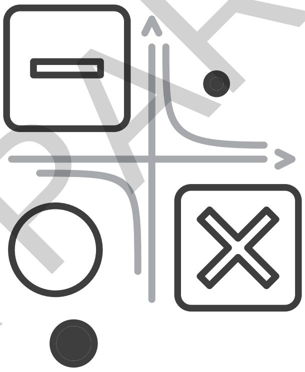

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.*
*Lucrarea este elaborată conform programei şcolare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Amalia Mărăşescu, Olimpia Filip
Corectură: autorii
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**Bacalaureat 2021 : matematică - M_mate-info : teme recapitulative - 60 de teste, după modelul M.E.C - breviar teoretic** / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, .... - Piteşti : Paralela 45, 2020
Conţine bibliografie
ISBN 978-973-47-3278-4
I. Zanoschi, Adrian
II. Iurea, Gheorghe
III. Popa, Gabriel
51

**COMENZI – CARTEA PRIN POŞTĂ**

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesaţi **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Adrian Zanoschi
Gabriel Popa
Gheorghe Iurea
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

# Bacalaureat 2021
# Matematică
# *M_mate-info*

Teme recapitulative
60 de teste, după modelul M.E.C.
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

# Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi probelor de examen.

Prima parte a lucrării conţine probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată, în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele sunt însoţite de soluţii detaliate şi de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 60 de teste, însoţite de răspunsuri şi de rezolvări, iar la sfârşit există un breviar teoretic, care conţine principalele noţiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidenţiate printr-o steluţă. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluţă.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

*Autorii*

# Teme recapitulative

# Clasa a IX-a

## 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

**1.** Calculaţi:

a) $2 \cdot (-3) - (-4) : 2 + (-25) : (-5)$;  b) $2^{20} : 2^{18} - 3^{20} : 3^{19} + 5^0$;

c) $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0,3 + \frac{1}{15}\right)$;  d) $8 \cdot [0,(3) + 0,1(6)]$.

**2.** Fie $0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Calculaţi: $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}$.

**3.** Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ şi $B = (-2, 7)$. Determinaţi mulţimea: $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

**4.** Ordonaţi crescător numerele $a = 2,5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2,(51)$, $d = 2,51$.

**5.** Calculaţi:

a) $\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$;  b) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$;  d) $\frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{2}{\sqrt{7} + 3}$.

**6.** Arătaţi că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

**7.** Arătaţi că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$ este natural.

**8.** Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ şi $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculaţi media aritmetică şi media geometrică a numerelor $a$ şi $b$.

**9.** Determinaţi numerele raţionale $a$ şi $b$, ştiind că $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

**10.** Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

**11.** Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

**12.** Aflați câte numere iraționale conține mulțimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{199}, \sqrt{200}\}$.

**13.** Determinați partea întreagă și partea fracționară pentru fiecare dintre următoarele numere: $a = 2{,}7$, $b = -0{,}6$, $c = 13$, $d = -\sqrt{3}$.

**14.** Calculați:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$;

b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$;

d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$.

**15.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $[x] + [x + 1] + [x + 2] = 24$;

b) $[x + 1] = 2x - 1$;

c) $\{2x\} = 0$;

d) $\{x\} = \frac{1}{3}$.

**16.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$;

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1 - 2x| = |x + 4|$;

d) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

**17.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1 - 2x| \leq 3$;

b) $|x + 3| \geq 4$.

**18.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 1| \leq 100\}$.

**19.** Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ nu depinde de numărul real $x$.

**20.** Demonstrați că $|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1$, pentru orice număr real $x$.

**21.** Demonstrați că $x^2 + 3x + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**22.** Demonstrați că, dacă $x, y \in [2, \infty)$, atunci $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$.

**23.** Demonstrați că, dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.

**24.** Fie $E(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) $E(x) > \frac{3}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

# Clasa a X-a

## 2.1. Radicali și logaritmi

**1.** Arătaţi că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\frac{7}{2}}-5\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$;  b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

**2.** Se consideră numerele $a=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ şi $b=\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}$.

**3.** Arătaţi că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

**4.** a) Arătaţi că, dacă $a$, $b$, $c$, $d$ sunt numere raţionale, astfel încât $a\sqrt{2}+b=c\sqrt{2}+d$, atunci $a=c$ şi $b=d$.

b) Determinaţi numerele raţionale $a$ şi $b$, ştiind că $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=a+b\left(1+\sqrt{2}\right)$.

**5.** Calculaţi $\left[\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x$).

**6.** Aduceţi la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$;  b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$;  d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

**7.** a) Aduceţi la forma cea mai simplă: $E(x,\ y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x,\ y\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că numărul $a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}}$ este raţional.

**8.** Se consideră $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculaţi $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

**9.** a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ şi $b=\sqrt[16]{2}$. Arătaţi că $a\cdot b$ este număr raţional.

b) Arătaţi că numărul $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

**10.** Determinaţi numărul natural $k$, dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k = x$, pentru orice $x > 0$.

**11.** Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}$.

**12.** Se consideră numărul real $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

a) Arătaţi că $a^3 = 14 - 3a$.

b) Arătaţi că $a^3 + 3a - 14 = (a - 2)(a^2 + 2a + 7)$.

c) Demonstraţi că $a \in \mathbb{Q}$.

**13.** Arătaţi că $\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=2$.

**14.** Ordonaţi crescător numerele:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4}$ şi $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}},\ \sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ şi $\sqrt[3]{4}$.

**15.** Comparaţi numerele:

a) $a=\sqrt{2}+\sqrt{7}$ şi $b=\sqrt{3}+\sqrt{6}$; b) $a=\sqrt{13}-\sqrt{12}$ şi $b=\sqrt{12}-\sqrt{11}$;

c) $a=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ şi $b=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

**16.** Comparaţi numerele $a=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ şi $b=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$

**17.** Calculaţi:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$; b) $\log_2 0{,}125$; c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$; d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;

e) $4^{1-\log_2\sqrt{8}}$.

**18.** Ordonaţi crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3\frac{1}{27}$ şi $c = \log_2\frac{1}{32}$.

**19.** a) Arătaţi că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

b) Demonstraţi că numărul $b=\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

**20.** Calculaţi:

a) $\log_2\left(6+\sqrt{8}\right)+\log_2\left(6-\sqrt{8}\right)-\log_2 7$; b) $\lg 0{,}01+2^{\log_2 3}-9^{\log_3 5}$;

c) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$; d) $\frac{\log_3 5\cdot\log_7 11}{\log_7 5\cdot\log_3 11}$.

**21.** Calculaţi:

a) $\log_2 8\cdot\log_3 9\cdot\log_5\sqrt{5}$; b) $\log_2 8\sqrt{2}-\log_3 3\sqrt{3}$.

# Clasa a XII-a

## 4.1. Legi de compoziție

**1.** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 2^{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $2017 \circ (-2017)$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $x \circ x^2 = 64$.

c) Demonstraţi că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

**2.** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie „$\circ$", definită prin $x \circ y = x + y + 11$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Găsiţi două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Determinaţi cel mai mare număr natural $n$, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 2017$.

**3.** Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi $(-1000) \circ (-999) \circ \ldots \circ 1000$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

**4.** Pe mulţimea numerelor complexe, se consideră legea de compoziţie „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + ix + iy - 1 - i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

a) Demonstraţi că $x \circ y = (x + i)(y + i) - i$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, are loc egalitatea $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = (x_1 + i)(x_2 + i)\ldots(x_n + i) - i$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 1 - i$.

**5.** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, oricare ar fi $x$, $y \in \mathbb{R}$. Mai considerăm $x_0 \in \mathbb{Q}^*$ şi $x_n = x_0 \circ x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstraţi că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi elementul neutru al operaţiei „$\circ$”.

c) Arătaţi că $x_3$ este număr iraţional.

**6.** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că legea „$*$” este asociativă şi comutativă.

b) Determinaţi elementul neutru ale legii „$*$”.

c) Demonstraţi că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc identitatea:

$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

**7.** Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim operaţia $x * y = ax + by$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Determinaţi numerele reale $a$ şi $b$, ştiind că operaţia introdusă este asociativă şi comutativă.

**8.** Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru pentru fiecare dintre următoarele legi de compoziţie:

a) $x \top y = \dfrac{x+y}{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

b) $x \perp y = \sqrt{xy}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

c) $A * B = AB + BA$, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**9.** Se consideră mulţimea $G = (-\infty, 0)$ şi operaţia $x * y = \dfrac{xy}{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstraţi că $G$ este parte stabilă în raport cu operaţia dată.

b) Arătaţi că operaţia considerată este comutativă şi asociativă.

c) Stabiliţi dacă operaţia „$*$” admite sau nu element neutru.

**10.** Pe mulţimea $G = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ considerăm operaţia $x \circ y = x^{3 \ln y}$, oricare ar fi $x, y \in G$.

a) Demonstraţi că $x \circ y \in G$, oricare ar fi $x, y \in G$.

b) Arătaţi că $x \circ y = y \circ x$, oricare ar fi $x, y \in G$.

c) Rezolvaţi în $G$ ecuaţia $x \circ x = e^3$.

**11.** Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

# Soluții

## Clasa a IX-a

### 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

**1.** a) 1; b) 2; c) 3; d) 4. **2.** $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} = 4 + 2 + 8 = 14$. **3.** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **4.** $b < d < a < c$. **5.** a) $2\sqrt{5}$; b) 1; c) 6; d) 1. **6.** $a = 6 \in \mathbb{N}$. **7.** $b = 2 \in \mathbb{N}$. **8.** $a = \sqrt{2}$, $b = 18\sqrt{2}$, $m_a = \dfrac{19\sqrt{2}}{2}$, $m_g = 6$. **9.** $a = 8$, $b = -4$. **10.** $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$, $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$, $\forall\, x \in [0, 51]$. **11.** $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(y+3)^2+1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. **12.** 186. **13.** $[a] = 2$, $\{a\} = 0{,}7$; $[b] = -1$, $\{b\} = 0{,}4$; $[c] = 13$, $\{c\} = 0$; $[d] = -2$, $\{d\} = 2 - \sqrt{3}$. **14.** a) $-2$; b) 0; c) 5; d) 1. **15.** a) $x \in [7, 8)$; b) $x \in \left\{\dfrac{3}{2}, 2\right\}$; c) $x = \dfrac{k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$; d) $x = k + \dfrac{1}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **16.** a) $x \in \{-3, 7\}$; b) $x \in \{-3, 5\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$; d) $x = -1$. **17.** a) $x \in [-1, 2]$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. **18.** 100. **19.** $E(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **20.** $|2x - 3| + 2|x - 1| = |2x - 3| + |2x - 2| = |2x - 3| + |2 - 2x| \geq |2x - 3 + 2 - 2x| = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **21.** $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **22.** $xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2 \in [2, +\infty)$, $\forall\, x, y \in [2, +\infty)$. **23.** $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} \Leftrightarrow -1 - xy < x + y \Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) > 0$, $\forall\, x, y \in (-1, 1)$ etc. **24.** b) $E(x) = (x^2 + 1)\left(\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\right) > \dfrac{3}{4}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

**25.** c) $\dfrac{a+b}{c} + \dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) + \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$, $\forall\, a, b, c \in (0, +\infty)$.

**26.** b) Fie $P(n)$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Evident $P(1)$: $1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci avem $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2) = \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$, deci $P(k + 1)$ este adevărată. Drept urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. **30.** 6. **31.** 171. **32.** 192. **33.** 60. **34.** 243. **35.** 120. **36.** 60. **37.** $99 \cdot 26^3 = 1740024$. **38.** 16. **39.** 47. **40.** a) 8; b) 25; c) 50.

# Breviar teoretic

## 1. ALGEBRĂ

### 1.1. Formule de calcul prescurtat

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

### 1.2. Sume remarcabile

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

### 1.3. Modulul unui număr real

*Definiție*. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

*Proprietăți*: 1) $|x| \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

4) $|x : y| = |x| : |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$; 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$; egalitatea are loc dacă şi numai dacă $xy \geq 0$; 6) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a > 0$; 7) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$.

### 1.4. Partea întreagă și partea fracționară

*Definiție*. *Partea întreagă* a unui număr real $x$ este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu $x$ şi se notează cu $[x]$. *Partea fracționară* (*zecimală*) a unui număr real $x$ se notează cu $\{x\}$ şi este definită astfel: $\{x\} = x - [x]$.
*Proprietăți*: 1) $[x] \in \mathbb{Z}$ şi $\{x\} \in [0, 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; 2) $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

3) $[x + k] = [x] + k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\{x + k\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

## 1.5. Progresii

**Progresii aritmetice.** *Definiție*. Şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ este o *progresie aritmetică* de rație $r$ dacă $a_{n+1} = a_n + r, \forall n \ge 1$ (în acest caz, scriem $\div (a_n)_{n \ge 1}$).

*Proprietăți*: 1) $\div (a_n)_{n \ge 1} \Leftrightarrow a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \forall n \ge 2$; 2) $\div (a_n)_{n \ge 1} \Leftrightarrow (\exists)\ r$ astfel încât $a_n = a_1 + (n-1)r, \forall n \ge 1$; 3) $\div (a_n)_{n \ge 1} \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}, \forall n \ge 1$.

**Progresii geometrice.** *Definiție*. Şirul $(b_n)_{n \ge 1}$ (cu $b_1 \ne 0$) este o *progresie geometrică* de rație $q (q \ne 0)$ dacă $b_{n+1} = b_n \cdot q, \forall n \ge 1$ (în acest caz, scriem $\div\!\div (b_n)_{n \ge 1}$).

*Proprietăți*. 1) $\div\!\div (b_n)_{n \ge 1} \Leftrightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}, \forall n \ge 2$; 2) $\div\!\div (b_n)_{n \ge 1} \Leftrightarrow (\exists)\ q \ne 0$ astfel încât $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \ge 1$; 3) Dacă $(b_n)_{n \ge 1}$ este o progresie geometrică de rație $q \ne 1$, atunci $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, \forall n \ge 1$.

## 1.6. Ecuația de gradul al II-lea cu coeficienți reali

Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \ne 0$), are *discriminantul* $\Delta = b^2 - 4ac$. Dacă $\Delta \ge 0$, ecuaţia are două soluţii reale (distincte dacă $\Delta \ne 0$ şi egale dacă $\Delta = 0$): $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Când $\Delta < 0$, ecuaţia nu are soluţii reale. Soluţiile ecuaţiei, $x_1, x_2$, verifică *relațiile lui Viète*: $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ şi $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. Dacă numerele $x_1, x_2$ au proprietăţile $x_1 + x_2 = S$ şi $x_1x_2 = P$, atunci ele sunt soluţiile ecuaţiei de gradul al II-lea: $x^2 - Sx + P = 0$.

## 1.7. Funcții – definiții, proprietăți

**Graficul și imaginea unei funcții**. Numim *graficul* funcţiei $f : A \to B$ mulţimea $G_f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$. Dacă $f$ este o funcţie numerică (adică $A, B \subset \mathbb{R}$), atunci $G_f$ are o reprezentare geometrică într-un plan pentru care am ales un reper cartezian. Această reprezentare geometrică se numeşte, de obicei, tot graficul funcţiei $f$. *Imaginea* funcţiei $f : A \to B$ este mulţimea $\operatorname{Im} f = \{y \in B \mid (\exists)\ x \in A$ pentru care $f(x) = y\} \subset B$.

**Funcţii injective, surjective, bijective.** Funcţia $f : A \to B$ este *injectivă* dacă ($\forall x, y \in A, x \ne y \Rightarrow f(x) \ne f(y)$), sau ($\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). Funcţia $f : A \to B$ este *surjectivă* dacă $\operatorname{Im} f = B$, adică $\forall y \in B, (\exists)\ x \in A$ pentru care $f(x) = y$. O funcţie se numeşte *bijectivă* dacă este atât injectivă, cât şi surjectivă.

**Compunerea funcțiilor.** Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt două funcţii, compusa lor este funcţia $g \circ f : A \to C$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$. Operaţia de compunere a funcţiilor este asociativă, dar nu este comutativă. Dacă notăm cu $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x, \forall x \in A$ *funcția identică a mulțimii A*, atunci $f \circ 1_A = f$, pentru orice funcţie $f : A \to B$ şi $1_A \circ g = g$, pentru orice funcţie $g : C \to A$.

# Cuprins

**Clasa a XII-a**