

Prof. univ. dr. **Radu Șerban**
(coordonator)

Lect. univ. dr. **Daniela Ijacu**

Lect. univ. dr. **Iulian Mircea**

ALGEBRĂ
ȘI ANALIZĂ MATEMATICĂ
TEORIE ȘI APLICAȚII

CORINT
EDUCAȚIONAL

Date despre autori:

Radu Șerban – prof. univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din București, distins cu titlul de profesor-emerit, autor sau coautor a 27 de cărți de specialitate, monografii, cursuri universitare și culegeri de probleme.

Daniela Ijacu – lector univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din București, coautor al lucrărilor de specialitate: *Probabilități și statistică matematică*, *Analysis and optimization of differential systems* (Editura Kluwer Academic, 2003).

Iulian Mircea – lector univ. dr. în Departamentul de Matematici Aplicate al Academiei de Studii Economice din București, autor a două cărți de specialitate: *Modele matematice în asigurări*, *Matematici financiare și actuariale*; coautor la patru monografii și cursuri universitare.

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. **Vasile Preda**, Universitatea București, Facultatea de Matematică

Prof. univ. dr. **Maria Tudor**, Academia de Studii Economice din București, Departamentul de Matematici Aplicate

Redactare: Alice-Raluca Petrescu

Tehnoredactare computerizată: Alice-Raluca Petrescu

Designul copertei: Dan Mihalache

ISBN 978-606-8723-32-7

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

ȘERBAN, RADU

Algebră și analiză matematică: teorie și aplicații / Radu Șerban (coord.),

Daniela Ijacu, Iulian Mircea. - București: Corint Books, 2015

Bibliogr.

ISBN 978-606-8723-32-7

I. Ijacu, Daniela

II. Mircea, Iulian

512(075.35)(076)

517(075.35)(076)

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

Pentru comenzi și informații, contactați:

GRUPUL EDITORIAL CORINT

Departamentul de Vânzări

Str. Mihai Eminescu nr. 54A, sector 1, București, cod poștal 010517

Tel./Fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20

Depozit

Calea Plevnei nr. 145, sector 6, București, cod poștal 060012

Tel.: 021.310.15.30

E-mail: vanzari@edituracorint.ro

Magazin virtual: www.edituracorint.ro

ISBN: 978-606-8723-32-7



Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	5
Partea I – Algebră liniară	7
<i>Capitolul 1. Spații vectoriale</i>	7
<i>Capitolul 2. Operatori liniari</i>	31
<i>Capitolul 3. Spații euclidiene</i>	73
<i>Capitolul 4. Aplicații de algebră</i>	86
Partea a II-a – Analiză matematică	115
<i>Capitolul 1. Elemente de topologie</i>	115
<i>Capitolul 2. Șiruri și serii numerice</i>	128
<i>Capitolul 3. Șiruri și serii de funcții</i>	147
<i>Capitolul 4. Funcții de mai multe variabile</i>	161
<i>Capitolul 5. Ecuații diferențiale</i>	207
<i>Capitolul 6. Elemente de teoria măsurii</i>	236
<i>Capitolul 7. Integrale</i>	263
<i>Capitolul 8. Aplicații</i>	283
<i>Bibliografie</i>	320

Cuvânt-înainte

Lucrarea de față tratează două domenii fundamentale ale matematicii: algebra liniară și analiza matematică. Lucrarea are la bază cursurile și seminariile de algebră și analiză matematică ținute de autori la Facultatea de Cibernetică, Statistică și Informatică Economică din Academia de Studii Economice (ASE) din București, precum și cursurile de Matematici aplicate în economie ținute de autori la alte facultăți din ASE.

Asistăm în ultimele decenii la o amplificare a aplicării matematicii în diverse domenii, printre care se numără și cel al studiilor economice. În acest sens, sunt de notorietate modelele matematice în domeniul financiar, modele care utilizează rezultate profunde din teoria integralei stochastice sau a ecuațiilor diferențiale stochastice. Practic, aproape orice teorie economică solicită un suport matematic. O analiză a unui sistem, fenomen sau proces economic, cât de cât consistentă și coerentă, face apel la matematică, cel puțin pentru aspectele cantitative și pentru modelarea variabilelor și a legăturilor dintre ele. De asemenea, imensul volum de date statistice și informații privind domeniul economic necesită pentru prelucrarea și utilizarea sa metode, procedee și algoritmi matematici. Modelarea matematică a fenomenelor și proceselor economice utilizează concepte și instrumente matematice de bază, cum sunt: ecuațiile, vectorii, operatorii liniari și neliniari, măsurile, mulțimile și funcțiile măsurabile, diferențialele, topologiile, procesele stochastice, lanțurile Markov, martingalele, integralele stochastice, seriile cronologice etc. Unele dintre acestea sunt tratate pe larg în lucrarea de față.

Lucrarea este structurată în două părți: partea întâi, destinată algebrei, are patru capitole (trei de teorie și unul de aplicații), iar partea a doua, destinată analizei matematice, are opt capitole (șapte de teorie și unul de aplicații).

Partea I – Algebră liniară are capitolele destinate spațiilor vectoriale, operatorilor liniari și spațiilor euclidiene. În capitolul 1, *Spații vectoriale*, prezentăm noțiunile de bază, teorema schimbului a lui Steinitz, lema substituției, suma subspațiilor liniare, teorema dimensiunii și teorema de existență a suplimentului direct. În capitolul 2, *Operatori liniari*, printre altele, prezentăm teorema dimensiunii pentru operatori liniari, teorema Hamilton-Cayley, teorema de caracterizare a operatorilor diagonalizabili, forma canonică Jordan, algoritmul de jordanizare, proprietățile funcționalelor liniare, biliniare și pătratice, teorema inerției etc. În capitolul 3, *Spații euclidiene*, prezentăm inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, proprietățile normei și ale distanței, algoritmul de ortogonalizare a bazelor, descompunerea în subspații ortogonale, proprietăți ale operatorului autoadjunct și ale operatorului ortogonal etc.

Partea a II-a – Analiză matematică are capitolele destinate elementelor de topologie, seriilor numerice și seriilor de funcții, diferențialelor și extremelor funcțiilor reale de mai multe variabile reale, ecuațiilor diferențiale și elementelor de teoria măsurii și a integralei. În capitolul 4, *Funcții de mai multe variabile*, am prezentat câteva teoreme privind condițiile necesare și suficiente pentru punctele de extrem locale și globale, un model de stoc pentru un tip de produse, teorema funcțiilor implicite și metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru extremele cu legături. În capitolul 5, *Ecuații diferențiale*, am prezentat teorema lui Peano de existență a soluției locale a problemei Cauchy, ecuația integrală asociată unei ecuații diferențiale, teorema lui Liouville privind wronskianul soluțiilor și folosirea formei Jordan în rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. În capitolul 7, *Integrale*, am prezentat integrala Lebesgue, integrala Riemann cu parametru, integralele euleriene: gama și beta, și integrala dublă pe un domeniu compact care are arie.

Ținând cont de importanța modelelor econometrice în studiile economice, am prezentat un material adecvat pentru spațiile metrice, pentru spațiile cu măsură, pentru funcțiile măsurabile și pentru construcția unei măsurii (abordările Carathéodory, Jordan și Lebesgue-Radon).

Având un scop predominant didactic, lucrarea prezintă modul în care se operează cu elementele teoretice expuse (fiecare parte are un capitol de probleme rezolvate), demonstrații elaborate integral, numeroase exemple și aplicații. Noțiunile sunt prezentate într-o manieră graduală, ușor de înțeles de către cititor. Prin această organizare a materiei, am vizat atât studenții de la licență și masterat, cât și pe cei din școlile doctorale.

Din analiza conținutului și din cele câteva idei scoase din lucrare se vede utilitatea acestei lucrări și importanța ei pentru studenții de la facultățile economice, dar și pentru cercetătorii și economiștii interesați de matematicile aplicate.

Autorii

partea **I. ALGEBRĂ LINIARĂ**

Capitolul 1. Spații vectoriale

1.1. Noțiuni de bază

În cele ce urmează, vom prezenta o nouă structură algebrică, structura de spațiu vectorial (sau spațiu liniar) utilizând structurile algebrice cunoscute: monoid, grup, inel, corp. Pentru început să reamintim noțiunea de corp:

1.1. Definiție: Fie mulțimea $\mathbf{K} \neq \Phi$ și două operații definite pe \mathbf{K} " \oplus ", " \otimes ": $\mathbf{K} \times \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$. Tripletul $(\mathbf{K}, \oplus, \otimes)$ este **corp** dacă sunt verificate următoarele cinci proprietăți:

- i) (\mathbf{K}, \oplus) este grup abelian (în care notăm elementul neutru cu 0 și opusul lui $x \in \mathbf{K}$ cu $-x \in \mathbf{K}$);
- ii) (\mathbf{K}, \otimes) este monoid (în care notăm elementul neutru cu 1);
- iii) $0 \neq 1$;
- iv) " \otimes " este distributivă la stânga și la dreapta față de " \oplus ";
- v) $(\forall) x \in \mathbf{K}, x \neq 0, (\exists) x^{-1} \in \mathbf{K}$ astfel încât $x \otimes x^{-1} = x^{-1} \otimes x = 1$.

Cu ajutorul noțiunii de corp se definește noțiunea de **spațiu vectorial (spațiu liniar)**:

Fie V o mulțime nevidă ($\neq \Phi$) și $(\mathbf{K}, \oplus, \otimes)$ un corp comutativ. Elementele lui \mathbf{K} se numesc **scalari**, elementele lui V se numesc **vectori**. Se definesc două operații:

a) operația internă numită **adunarea vectorilor**, notată prin „+”, unde:
 $+: V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow x + y$;

b) operația externă numită **înmulțirea cu scalari a vectorilor**, notată prin „ \cdot ”, unde: $\cdot: \mathbf{K} \times V \rightarrow V, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$.

Vom considera că $x \cdot \alpha = \alpha \cdot x$ pentru $\forall x \in V$ și $\forall \alpha \in \mathbf{K}$.

- 1.2. Definiție:** Spunem că V este **spațiu vectorial** (sau **spațiu liniar**) peste corpul \mathbf{K} (sau că perechea (V, \mathbf{K}) este spațiu vectorial (liniar)), dacă:
- i) $(V, +)$ este grup abelian (în care elementul neutru este notat prin $\bar{0}$, mai simplu 0 , și se numește **vectorul nul**);
 - ii) $(\alpha \oplus \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in V$;
 - iii) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall x, y \in V$;
 - iv) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \otimes \beta) \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \forall x \in V$;
 - v) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$, unde 1 este elementul unitate al corpului (elementul neutru pentru operația \otimes).

Pentru simplificarea expunerii, notăm mai simplu și operațiile corpului, adică notăm corpul cu $(\mathbf{K}, +, \cdot)$. Pentru $\forall x \in V$ elementul $-x \in V$ se numește **vectorul opus** lui x .

Cazuri particulare:

1. Pentru $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, spațiul vectorial (V, \mathbf{R}) se numește *spațiu vectorial real*.
2. Pentru $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, spațiul vectorial (V, \mathbf{C}) se numește *spațiu vectorial complex*.

1.3. Exemple:

1. $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ este spațiu vectorial, numit *spațiu vectorial numeric real*, unde:

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n} \right\},$$

iar $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ este vector coloană;

operația internă se definește astfel:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbf{R}^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)^T;$$

operația externă se definește astfel:

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)^T.$$

Vectorul nul din \mathbf{R}^n se notează prin 0_n (sau mai simplu cu 0).

Generalizare: $(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$ este spațiu vectorial, unde:

$$\mathbf{K}^n = \underbrace{\mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \dots \times \mathbf{K}}_{n \text{ ori}} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbf{K}, i = \overline{1, n} \right\}.$$

Caz particular: $\mathbf{K} = \mathbf{R} \Rightarrow (\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ spațiu numeric real

$\mathbf{K} = \mathbf{C} \Rightarrow (\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ spațiu numeric complex.

2. $(M_{m,n}(\mathbf{K}), \mathbf{K})$ este spațiul vectorial al matricelor de tipul (m, n) cu elemente din \mathbf{K} , unde $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ sau $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, operația internă este adunarea matricelor și operația externă este înmulțirea cu numere a matricelor; aici $\bar{0} = 0_{m,n}$.

3. $(F[a, b], \mathbf{R})$ este spațiul vectorial al funcțiilor reale definite pe intervalul $[a, b]$, unde: $F[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}\}$, operația internă este adunarea funcțiilor, iar operația externă este înmulțirea cu numere a funcțiilor; aici $\bar{0}$ este funcția nulă pe $[a, b]$.

4. $(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$ este spațiul vectorial al polinoamelor, unde $\mathbf{R}_n[X]$ este mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali, de grad cel mult n , în nedeterminata X , operația internă este adunarea polinoamelor, iar operația externă este înmulțirea cu numere reale a polinoamelor; aici $\bar{0}$ este polinomul nul.

5. $(\{\bar{0}\}, \mathbf{K})$ este spațiul vectorial nul, unde: operația internă: $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$; operația externă: $\forall \alpha \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Regulile de calcul sunt prezentate în următoarea propoziție.

1.4. Propoziție: Fie spațiul vectorial (V, \mathbf{K}) . Atunci:

- i) $\forall x \in V \Rightarrow 0 \cdot x = \bar{0}$;
- ii) $\forall \alpha \in \mathbf{K} \Rightarrow \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$;
- iii) $\forall x \in V \Rightarrow (-1) \cdot x = -x$;
- iv) Dacă $\alpha \neq 0$ și $\alpha \cdot x = \bar{0} \Rightarrow x = \bar{0}$.

► *Demonstrație:*

$$\text{i) } 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \stackrel{\text{unicitate elem. neutru } \bar{0}}{\Rightarrow} 0 \cdot x = \bar{0};$$

$$\text{ii) } \alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \alpha \cdot \bar{0} + \alpha \cdot \bar{0} \stackrel{\text{unicitatea lui } \bar{0}}{\Rightarrow} \alpha \cdot \bar{0} = \bar{0};$$

iii) Din (i) avem:

$$0 \cdot x = \bar{0} \Leftrightarrow (1 + (-1)) \cdot x = \bar{0} \Leftrightarrow x + (-1) \cdot x = \bar{0} \stackrel{\text{unicitatea lui } -x}{\Rightarrow} (-1) \cdot x = -x;$$

$$\text{iv). Avem } x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}. \blacktriangleleft$$

1.5. Definiție: Fie spațiul vectorial (V, \mathbf{K}) și X o submulțime nevidă a lui

V . X se numește **subspațiu vectorial** al lui V dacă:

- i) este închisă la adunarea vectorilor, adică $\forall x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$;
- ii) $\forall \alpha \in \mathbf{K}, \forall x \in X \Rightarrow \alpha \cdot x \in X$.

1.6. Observație: (X, \mathbf{K}) este spațiu vectorial.

1.7. Exemple de subspații vectoriale:

1. Spațiul vectorial nul este subspațiu vectorial al oricărui spațiu vectorial.

2. Fie $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ și $X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}$. Atunci

X este subspațiu vectorial al lui $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$.

1.8. Propoziție: Intersecția a două subspații vectoriale ale spațiului vectorial (V, \mathbf{K}) este tot un subspațiu vectorial.

► *Demonstrație:*

Fie X și Y subspații vectoriale ale lui V . Fie $x, y \in X \cap Y$ vectori oarecare. Din $x, y \in X$ și X subspațiu vectorial, rezultă $x + y \in X$. Analog avem $x + y \in Y$. Prin urmare $(x + y) \in X \cap Y, \forall x, y \in X \cap Y$. Fie $\alpha \in \mathbf{K}$ și $x \in X \cap Y$. Din $x \in X$ și X subspațiu vectorial rezultă $\alpha \cdot x \in X$. Analog avem $\alpha \cdot x \in Y$, prin urmare $\alpha \cdot x \in X \cap Y$ pentru orice $\alpha \in \mathbf{K}$ și orice $x \in X \cap Y$. Așadar, $(X \cap Y, \mathbf{K})$ este subspațiu vectorial al lui (V, \mathbf{K}) . ◀

1.9. Observație: În general, reuniunea a două subspații vectoriale nu este subspațiu vectorial.

1.10. Definiție: Fie (V, \mathbf{K}) un spațiu vectorial. Se numește **combinația**

liniară a vectorilor $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$

vectorul: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ (notat)

1.11. Definiție: Un sistem finit de vectori din V se numește **liniar**

independent dacă: $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

1.12. Observație: Orice vector nenul formează un sistem liniar independent.