ALINA PARASCHIVA
SILVIU DĂNEȚ

matematică
Formule și noțiuni generale

clasele

IX-XII

CORINT
EDUCAȚIONAL

Cuprins

ANALIZĂ MATEMATICĂ

GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI SPAȚIU

GEOMETRIE SINTETICĂ

TRIGONOMETRIE

ALGEBRĂ

Capitolul I

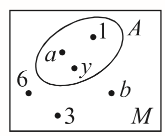
Mulțimi

1. Relații între mulțimi

1.1. Apartenența unui element la o mulțime

Fie A o mulțime inclusă într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiții:



◆ Un element x **aparține** unei mulțimi A dacă se află în acea mulțime.

Notație: $x \in A$.

Se citește: x aparține lui A.

◆ Un element x **nu aparține** unei mulțimi A dacă nu se află în acea mulțime.

Notație: $x \notin A$.

Se citește: x nu aparține lui A.

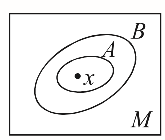
◆ Dacă mulțimea A nu are nici un element se numește **mulțime vidă**.

Notație: $A = \varnothing$.

1.2. Incluziunea unei mulțimi în altă mulțime

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiții:

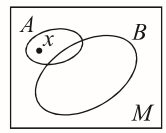


◆ Mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element x din A se află în B.

Notație: $A \subset B$ sau $B \supset A$.

Se citește: A inclus în B sau B include A.

Avem: $A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A$ avem $x \in B$.



◆ Mulțimea A **nu este inclusă** în mulțimea B dacă există cel puțin un element din A care nu se află în B.

Notație: $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$.

Se citește: A nu este inclus în B sau B nu include A.

Avem: $A \not\subset B \Leftrightarrow \exists\, x \in A$ astfel încât $x \notin B$.

Proprietățile incluziunii:

Fe M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *reflexivitate:* $A \subset A$, $\forall\, A \subset M$;

2. *antisimetrie:* ($A \subset B$ și $B \subset A$) $\Rightarrow A = B$, $\forall\, A, B \subset M$;

3. *tranzitivitate:* ($A \subset B$ și $B \subset C$) $\Rightarrow A \subset C$, $\forall\, A, B, C \subset M$;

4. $\varnothing \subset A$, $\forall\, A \subset M$.

Observație: Dacă $A \subset B$, atunci A este o submulțime a lui B.

Definiție: Dacă A este o mulțime, atunci mulțimea formată din toate submulțimile lui A se numește **mulțimea părților lui *A***.

Notație: $\mathcal{P}(A)$.

Observații:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$.

2. $A \in \mathcal{P}(A)$.

3. Dacă A are n elemente, $\mathcal{P}(A)$ are 2^n elemente.

1.3. Egalitatea mulțimilor

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiție: Mulțimea A este egală cu mulțimea B dacă A este inclusă în B și B este inclusă în A.

Notație: $A = B$.

Se citește: A egală cu B.

Avem: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$.

Observație: Două mulțimi sunt egale dacă un element al uneia este și al celeilalte, și invers.

Proprietățile egalității:

Fie M mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *reflexivitate:* $A = A$, $\forall A \subset M$;

2. *simetrie:* $A = B \Rightarrow B = A$, $\forall A, B \subset M$;

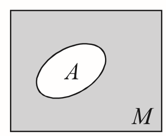
3. *tranzitivitate:* $(A = B$ și $B = C) \Rightarrow A = C$, $\forall A, B, C \subset M$.

2. Operații cu mulțimi

2.1. Complementara unei mulțimi

Fie A o mulțime inclusă într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiție:* Complementara mulțimii *A este mulțimea formată din elementele lui M care nu aparțin lui A.



Notație: C_A sau $C_M A$.

Se citește: complementara lui A sau complementara lui A în raport cu M

$C_M A = \{x \mid x \in M, x \notin A\}$.

Proprietățile complementarei:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $C_M(C_M A) = A$, $\forall A \subset M$;

2. $C_M A = M \setminus A$, $\forall A \subset M$;

3. $C_M \varnothing = M$;

4. $C_M M = \varnothing$;

5. $A \cup C_M A = M$, $\forall A \subset M$ (principiul terțului exclus);

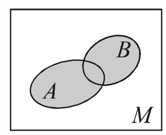
6. $A \cap C_M A = \varnothing$, $\forall A \subset M$ (principiul noncontradicției);

7. $A \subset B \Rightarrow C_M B \subset C_M A$, $\forall A, B \subset M$.

2.2. Reuniunea mulțimilor

Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiție: **Reuniunea mulțimilor A și B** este mulțimea formată din elementele lui M care aparțin sau lui A sau lui B.



Notație: $A \cup B$.

Se citește: A reunit cu B.

$A \cup B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ sau } x \in B\}$

Proprietățile reuniunii:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate:* $A \cup B = B \cup A$, $\forall\, A, B \subset M$;

2. *asociativitate:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\forall\, A, B, C \subset M$;

3. *idempotență:* $A \cup A = A$, $\forall\, A \subset M$;

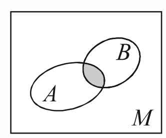
4. $A \cup \varnothing = A$, $\forall\, A \subset M$.

2.3. Intersecția mulțimilor

Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiții:

◆ **Intersecția mulțimilor A și B** este mulțimea formată din elementele lui M care aparțin și lui A și B.



Notație: $A \cap B$.

Se citește: A intersectat cu B.

$A \cap B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ și } x \in B\}$.

◆ Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci mulțimile A și B se numesc **disjuncte**.

Proprietățile intersecției:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate:* $A \cap B = B \cap A$, $\forall\, A, B \subset M$;

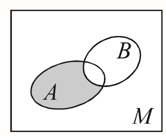
2. *asociativitate:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $\forall\, A, B, C \subset M$;

3. *idempotență:* $A \cap A = A$, $\forall A \subset M$;
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\forall A \subset M$;
5. $A \cap B \subset A \Rightarrow A \cap B \subset B$, $\forall A, B \subset M$;
6. *distributivitatea intersecției față de reuniune*:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\forall A, B, C \subset M$.
7. *distributivitatea reuniunii față de intersecție*:
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
8. *absorbție*: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$, $\forall A, B \subset M$.

2.4. Diferența mulțimilor

Fie A și B mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiție: **Diferența mulțimilor A și B**, în această ordine, este mulțimea elementelor lui M care aparțin lui A și nu aparțin lui B.



Notație: $A \setminus B$ sau $A - B$.

Se citește: A fără B.

$A \setminus B = \{x \mid x \in M, x \in A \text{ și } x \notin B\}$

Proprietățile diferenței:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $A \setminus A = \varnothing$, $\forall A \subset M$;
2. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,
   $\forall A, B, C \subset M$;
3. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, $\forall A, B \subset M$;
4. $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$, $\forall A, B \subset M$.

2.5. Diferența simetrică a mulțimilor

Fie A și B două mulțimi incluse într-o mulțime totală (de referință) M.

Definiție: **Diferența simetrică a mulțimilor A și B** este mulțimea obținută ca reuniune a diferențelor $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

Notație: $A \triangle B$.

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Proprietățile diferenței simetrice:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. *comutativitate:* $A \triangle B = B \triangle A$, $\forall A, B \subset M$;

2. *asociativitate:* $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, $\forall A, B, C \subset M$;

3. $A \triangle A = \varnothing$, $\forall A \subset M$;

4. $A \triangle \varnothing = \varnothing \triangle A = A$, $\forall A \subset M$;

5. *distributivitatea intersecției față de diferența simetrică:* $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$, $\forall A, B, C \subset M$;

6. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $\forall A, B \subset M$.

2.6. Produs cartezian al mulțimilor

Definiție: **Produsul cartezian al mulțimilor *A* și *B***, în această ordine, este mulțimea perechilor ordonate având primul element din A și al doilea din B.

Notație: $A \times B$.

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$

Observație: Produsul cartezian al mulțimilor $A_1, A_2, ..., A_n$ este:

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in A_i, \forall i = \overline{1,n}\}$

Proprietățile produsului cartezian:

Fie M o mulțime de referință. Avem proprietățile:

1. $A \times B \neq B \times A$, $\forall A, B \subset M$;

2. *distributivitatea produsului cartezian față de reuniune:*
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $\forall A, B\ C \subset M$;
$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$;

3. *distributivitatea produsului cartezian față de intersecție:*
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$;
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $\forall A, B, C \subset M$.