

EDITURA PARALELA 45

PARALELA 45
mate 2000+
exelență

Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Geta Bonda
Pregătire de tipar & design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANDRICA, DORIN

Geometrie : teme și probleme pentru grupele de excelență :
clasele VII-X / Dorin Andrica, Eugen Jecan, Camelia Magdaș. - Pitești :
Paralela 45, 2019
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-2973-9

I. Jecan, Eugen
II. Magdaș, Camelia

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro
sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Dorin Andrica
Eugen Jecan
Camelia Maria Magdaș

GEOMETRIE

**Teme și probleme
pentru grupele de excelență**

Clasele VII-X

Editura Paralela 45

Cuprins

Introducere	9
Capitolul 1 Elemente de geometria cercului	11
1.1 Elemente de geometria cercului. Probleme generale	11
1.1.1 Probleme rezolvate	11
1.1.2 Probleme propuse	23
1.1.3 Soluțiile problemelor propuse	25
1.2 Puterea punctului față de cerc	35
1.2.1 Probleme rezolvate	36
1.2.2 Probleme propuse	43
1.2.3 Soluțiile problemelor propuse	45
1.3 Probleme de tangență	56
1.3.1 Probleme rezolvate	59
1.3.2 Probleme propuse	66
1.3.3 Soluțiile problemelor propuse	67
Capitolul 2 Elemente de trigonometrie	77
2.1 Aplicații directe	77
2.1.1 Probleme rezolvate	77
2.1.2 Probleme propuse	81
2.1.3 Soluțiile problemelor propuse	86
2.2 Sume și produse trigonometrice	98
2.2.1 Probleme rezolvate	98
2.2.2 Probleme propuse	104
2.2.3 Soluțiile problemelor propuse	105
2.3 Aplicații ale trigonometriei în geometrie	111
2.3.1 Probleme rezolvate	111
2.3.2 Probleme propuse	118
2.3.3 Soluțiile problemelor propuse	123
2.4 Inegalități trigonometrice	138

2.4.1	Probleme rezolvate	138
2.4.2	Probleme propuse	142
2.4.3	Soluțiile problemelor propuse	144
2.5	Ecuatii trigonometrice	152
2.5.1	Probleme rezolvate	152
2.5.2	Probleme propuse	156
2.5.3	Soluțiile problemelor propuse	158
Capitolul 3	Metoda vectorială în geometria plană	163
3.1	Vectori liberi. Operații cu vectori	163
3.1.1	Probleme rezolvate	164
3.1.2	Probleme propuse	170
3.1.3	Soluțiile problemelor propuse	172
3.2	Vectori de poziție	182
3.2.1	Probleme rezolvate	183
3.2.2	Probleme propuse	189
3.2.3	Soluțiile problemelor propuse	191
3.3	Produs scalar și aplicații	199
3.3.1	Probleme rezolvate	200
3.3.2	Probleme propuse	204
3.3.3	Soluțiile problemelor propuse	205
Capitolul 4	Transformări ale planului euclidian	209
4.1	Translația	209
4.1.1	Probleme rezolvate	209
4.1.2	Probleme propuse	213
4.1.3	Soluțiile problemelor propuse	213
4.2	Simetria	216
4.2.1	Probleme rezolvate	217
4.2.2	Probleme propuse	223
4.2.3	Soluțiile problemelor propuse	225
4.3	Rotația	230
4.3.1	Probleme rezolvate	230
4.3.2	Probleme propuse	236
4.3.3	Soluțiile problemelor propuse	237
4.4	Omotetii și inversiuni	239
4.4.1	Probleme rezolvate	239
4.4.2	Probleme propuse	244
4.4.3	Soluțiile problemelor propuse	244

Capitolul 5	Numere complexe	251
5.1	Aplicații ale numerelor complexe în algebră	251
5.1.1	Probleme rezolvate	251
5.1.2	Probleme propuse	260
5.1.3	Soluțiile problemelor propuse	264
5.2	Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	278
5.2.1	Probleme rezolvate	278
5.2.2	Probleme propuse	287
5.2.3	Soluțiile problemelor propuse	289
Capitolul 6	Maxime și minime geometrice	299
6.1	Maxime și minime geometrice	299
6.1.1	Probleme rezolvate	299
6.1.2	Probleme propuse	315
6.1.3	Soluțiile problemelor propuse	322
6.2	Inegalitatea Erdős–Mordell	359
6.2.1	Probleme rezolvate	359
6.2.2	Probleme propuse	362
6.2.3	Soluțiile problemelor propuse	362
Bibliografie		365

Introducere

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei și, în același timp, cea mai familiară și mai folosită în viața de zi cu zi. Denumirea provine de la Euclid (aprox. 325-265 î.Hr.), cel care a prezentat-o sistematic pentru prima dată în Grecia antică. Geometria euclidiană este un ansamblu de leme, corolare, teoreme și demonstrații, care folosește doar patru noțiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan și spațiu, și care se bazează pe cinci axiome, enunțate de Euclid în monumentală sa lucrare *Elementele*. Această lucrare este, după Biblie, probabil cea mai tradusă carte din lume și, de mai bine de 2000 de ani, își păstrează neștirbită valoarea. Euclid, prin definițiile și axiomele sale pune, de fapt, o importantă piatră de temelie la structurarea raționamentului științific. Prin numai cinci axiome el pune bazele geometriei pe care noi acum o numim geometrie euclidiană. Sunt de ajuns cinci adevăruri evidente pentru a construi o întreagă lume matematică.

Geometria euclidiană se sprijină în mod esențial pe desene geometrice, apelează preponderent în rezolvarea problemelor la construcții auxiliare care pot fi reduse la operații efectuate cu rigla și compasul și la considerații vizuale sintetice. Desenul reprezintă însă doar suportul intuitiv pentru raționamentul dezvoltat în procesul de rezolvare a unei probleme, aspect surprins foarte plastic de către marele matematician francez Henri Poincaré, care spunea că: „Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte”.

Prezentul volum reprezintă o completare cu aplicații și probleme pentru referința [10]. Materialul este organizat în șase capitole, fiecare dintre acestea conținând secțiuni cu conținut teoretic, probleme rezolvate, probleme propuse și soluții detaliate. Capitolul 1 este intitulat *Elemente de geometria cercului* și acoperă noțiunile generale referitoare la cerc, puterea punctului față de cerc, probleme de tangență. Capitolul 2, *Elemente de trigonometrie*, conține cinci secțiuni referitoare la următoarele aspecte: aplicații directe, sume și produse trigonometrice, aplicații ale trigonometriei în geometrie, inegalități trigonometrice, ecuații trigonometrice. Capitolul 3 se intitulează *Metoda vectorială în geometria plană* și materialul conținut se referă la: vectori liberi și operații cu vectori, vectori de

poziție, produs scalar și aplicații. Capitolul 4, *Transformări ale planului euclidian*, prezintă translația, simetria, rotația, omotetia și inversiunea. În capitolul 5, *Numere complexe*, sunt prezentate aplicații ale numerelor complexe în algebră și geometrie. Ultimul capitol, intitulat *Maxime și minime geometrice*, cuprinde o gamă variată de probleme de extrem geometric rezolvate cu metode și tehnici diverse.

Lucrarea este utilă pentru profesorii de matematică și poate deschide perspectiva unor aplicații interesante și abordări noi în munca cu grupele de excelență. Prin varietatea și nivelul de dificultate a problemelor, ea constituie un material eficient în pregătirea pentru diferitele concursuri școlare, activitate care implică aprofundarea cunoștințelor de geometrie și dezvoltarea capacităților rezolutiv-aplicative ale elevilor.

Autorii

Capitolul 1

Elemente de geometria cercului

1.1 Elemente de geometria cercului.

Probleme generale

1.1.1 Probleme rezolvate

1. Să se arate că într-un triunghi mijloacele laturilor, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor ce unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului sunt situate pe un același cerc (cercul lui Euler – cercul celor 9 puncte).

Soluție. Considerăm triunghiul ABC ascuțitunghic și notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ și $[AB]$ și cu A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$.

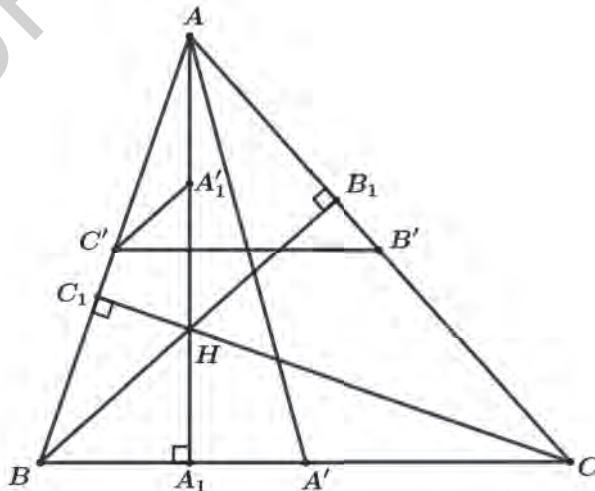


Figura 1.1

Din $[B'C']$ linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $B'C' \parallel BC$ și $B'C' = \frac{BC}{2}$. Rezultă că $BCB'C'$ este trapez. Deoarece $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'B' \parallel AB$ și $A'B' = \frac{AB}{2}$. În triunghiul dreptunghic AA_1B , A_1C' este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $A_1C' = \frac{AB}{2}$, de unde $[A'B'] = [A_1C']$, adică $A_1C'B'A'$ este trapez isoscel, iar punctele A_1, A', B', C' sunt conciclice. În mod analog se arată că B_1, A', C', B' și C_1, A', B', C' sunt conciclice, deci A_1, B_1, C_1 se găsesc pe cercul ce trece prin punctele A', B', C' . Pentru ca A'_1 să se găsească pe același cerc, vom arăta că patrulaterul $A'_1C'A'B'$ este inscripabil. Deoarece $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'C' \parallel AC$. În triunghiul ABH , $[C'A'_1]$ este linie mijlocie, deci $C'A'_1 \parallel BH$, dar $BH \perp AC$, de unde $A'_1C' \perp A'C'$. Analog $A'_1B' \perp A'B'$, deci $A'_1C'A'B'$ este patrulater inscripabil, adică A'_1 se găsește pe cercul determinat de A', B', C' . Analog se arată că și B'_1, C'_1 se află pe același cerc. Cele nouă puncte se găsesc pe același cerc, numit cercul lui Euler, în care $[A'_1A'], [B'_1B'], [C'_1C']$ sunt diametre.

2. Se consideră triunghiul ABC și O , respectiv I centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC . Să se arate că $OI^2 = R^2 - 2Rr$, unde R , respectiv r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC .

Soluție. Fie D punctul în care bisectoarea (AD intersectează cercul, iar E și F intersecțiile dreptei OI cu cercul circumscris triunghiului ABC . În triunghiul ABD , aplicând teorema sinusurilor, avem

$$\frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow BD = 2R \sin \frac{A}{2}.$$

În triunghiul AIM :

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{IM}{AI} = \frac{r}{AI} \Rightarrow AI = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Avem

$$\begin{aligned} m(\widehat{IBD}) &= m(\widehat{IBC}) + m(\widehat{CBD}) = \frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{CAD}) \\ &= \frac{m(\widehat{ABC})}{2} + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BC})}{4}; \end{aligned}$$

Capitolul 2

Elemente de trigonometrie

2.1 Aplicații directe

2.1.1 Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că:

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{4}.$$

Soluție. Folosind formulele:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \quad \text{și}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

avem

$$\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{4}} = \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} = \operatorname{tg} \frac{x}{4}.$$

2. Arătați că:

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x.$$

Soluție. Folosind identitatea

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x,$$

membrul stâng devine:

$$\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x + 2(\operatorname{ctg} 2x - 2 \operatorname{ctg} 4x) + 4(\operatorname{ctg} 4x - 2 \operatorname{ctg} 8x) + 8 \operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x.$$

3. Arătați că:

$$P = \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} = \frac{1}{8}.$$

Soluție.

$$\begin{aligned} P &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \sin \frac{2\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14}}{4 \cos \frac{\pi}{14}} \\ &= \frac{\sin \frac{4\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14}}{4 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{2 \cos \frac{3\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{6\pi}{14}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\sin \frac{3\pi}{7}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{8 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ are loc relația:

$$\sqrt{2+2\cos x} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{8}}.$$

Soluție. Fiecare factor din membrul stâng se poate scrie:

$$\sqrt{2+2\cos x} = \sqrt{2(1+\cos x)} = \sqrt{2^2 \cos^2 \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} = \sqrt{2+2\cos \frac{x}{2}} = 2 \cos \frac{x}{2^2} = 2 \cos \frac{x}{4},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos x}}} = \sqrt{2+2\cos \frac{x}{4}} = 2 \cos \frac{x}{2^3} = 2 \cos \frac{x}{8};$$

astfel avem:

$$\begin{aligned} 8 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} &= \frac{4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \left(2 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8}\right)}{\sin \frac{x}{8}} \\ &= \frac{2 \cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}\right)}{\sin \frac{x}{8}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{8}}. \end{aligned}$$