Redactare: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Geta Bonda
Pregătire de tipar & design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ANDRICA, DORIN
Geometrie : teme și probleme pentru grupele de excelență : clasele VII-X / Dorin Andrica, Eugen Jecan, Camelia Magdaș. - Pitești : Paralela 45, 2019
Conține bibliografie
ISBN 978-973-47-2973-9

I. Jecan, Eugen
II. Magdaș, Camelia

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Dorin Andrica
Eugen Jecan
Camelia Maria Magdaş

GEOMETRIE

Teme şi probleme pentru grupele de excelență

Clasele VII-X

Editura Paralela 45

Cuprins

Introducere

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei şi, în acelaşi timp, cea mai familiară şi mai folosită în viaţa de zi cu zi. Denumirea provine de la Euclid (aprox. 325-265 î.Hr.), cel care a prezentat-o sistematic pentru prima dată în Grecia antică. Geometria euclidiană este un ansamblu de leme, corolare, teoreme şi demonstraţii, care foloseşte doar patru noţiuni fundamentale: punct, dreaptă, plan şi spaţiu, şi care se bazează pe cinci axiome, enunţate de Euclid în monumentala sa lucrare *Elementele.* Această lucrare este, după Biblie, probabil cea mai tradusă carte din lume şi, de mai bine de 2000 de ani, îşi păstrează neştirbită valoarea. Euclid, prin definiţiile şi axiomele sale pune, de fapt, o importantă piatră de temelie la structurarea raţionamentului ştiinţific. Prin numai cinci axiome el pune bazele geometriei pe care noi acum o numim geometrie euclidiană. Sunt de ajuns cinci adevăruri evidente pentru a construi o întreagă lume matematică.

Geometria euclidiană se sprijină în mod esenţial pe desene geometrice, apelează preponderent în rezolvarea problemelor la construcţii auxiliare care pot fi reduse la operaţii efectuate cu rigla şi compasul şi la consideraţii vizuale sintetice. Desenul reprezintă însă doar suportul intuitiv pentru raţionamentul dezvoltat în procesul de rezolvare a unei probleme, aspect surprins foarte plastic de către marele matematician francez Henri Poincaré, care spunea că: „Geometria este arta de a raţiona corect pe figuri incorecte".

Prezentul volum reprezintă o completare cu aplicaţii şi probleme pentru referinţa [10]. Materialul este organizat în şase capitole, fiecare dintre acestea conţinând secţiuni cu conţinut teoretic, probleme rezolvate, probleme propuse şi soluţii detaliate. Capitolul 1 este intitulat *Elemente de geometria cercului* şi acoperă noţiunile generale referitoare la cerc, puterea punctului faţă de cerc, probleme de tangenţă. Capitolul 2, *Elemente de trigonometrie*, conţine cinci secţiuni referitoare la următoarele aspecte: aplicaţii directe, sume şi produse trigonometrice, aplicaţii ale trigonometriei în geometrie, inegalităţi trigonometrice, ecuaţii trigonometrice. Capitolul 3 se intitulează *Metoda vectorială în geometria plană* şi materialul conţinut se referă la: vectori liberi şi operaţii cu vectori, vectori de poziţie, produs scalar şi aplicaţii. Capitolul 4, *Transformări ale planului euclidian*, prezintă translaţia, simetria, rotaţia, omotetia şi inversiunea. În capitolul 5, *Numere complexe*, sunt prezentate aplicaţii ale numerelor complexe în algebră şi geometrie. Ultimul capitol, intitulat *Maxime şi minime geometrice*, cuprinde o gamă variată de probleme de extrem geometric rezolvate cu metode şi tehnici diverse.

Lucrarea este utilă pentru profesorii de matematică şi poate deschide perspectiva unor aplicaţii interesante şi abordări noi în munca cu grupele de excelenţă. Prin varietatea şi nivelul de dificultate a problemelor, ea constituie un material eficient în pregătirea pentru diferitele concursuri şcolare, activitate care implică aprofundarea cunoştinţelor de geometrie şi dezvoltarea capacităţilor rezolutiv-aplicative ale elevilor.

Autorii

Capitolul 1

Elemente de geometria cercului

1.1 Elemente de geometria cercului. Probleme generale

1.1.1 Probleme rezolvate

1. *Să se arate că într-un triunghi mijloacele laturilor, picioarele înălţimilor şi mijloacele segmentelor ce unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului sunt situate pe un acelaşi cerc (cercul lui Euler – cercul celor 9 puncte).*

Soluţie. Considerăm triunghiul ABC ascuţitunghic şi notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi $[AB]$ şi cu A'_1, B'_1, C'_1 mijloacele segmentelor $[AH]$, $[BH]$, $[CH]$.

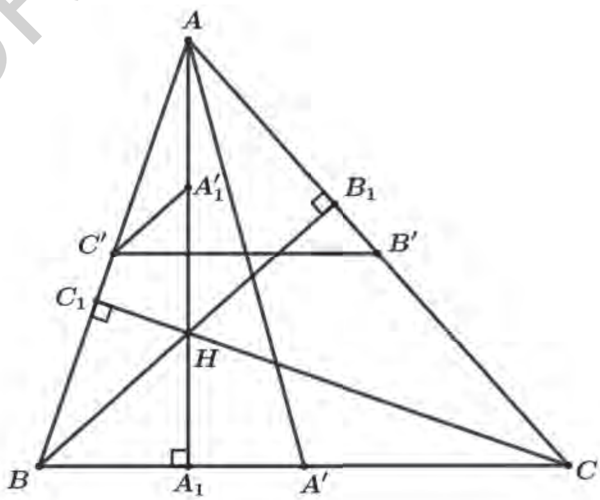

Figura 1.1

Din $[B'C']$ linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $B'C' \| BC$ şi $B'C' = \dfrac{BC}{2}$. Rezultă că $BCB'C'$ este trapez. Deoarece $[A'B']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'B' \| AB$ şi $A'B' = \dfrac{AB}{2}$. În triunghiul dreptunghic AA_1B, A_1C' este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $A_1C' = \dfrac{AB}{2}$, de unde $[A'B'] = [A_1C']$, adică $A_1C'B'A'$ este trapez isoscel, iar punctele A_1, A', B', C' sunt conciclice. În mod analog se arată că B_1, A', C', B' şi C_1, A', B', C' sunt conciclice, deci A_1, B_1, C_1 se găsesc pe cercul ce trece prin punctele A', B', C'. Pentru ca A_1' să se găsească pe acelaşi cerc, vom arăta că patrulaterul $A_1'C'A'B'$ este inscriptibil. Deoarece $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul ABC rezultă că $A'C' \| AC$. În triunghiul ABH, $[C'A_1']$ este linie mijlocie, deci $C'A_1' \| BH$, dar $BH \perp AC$, de unde $A_1'C' \perp A'C'$. Analog $A_1'B' \perp A'B'$, deci $A_1'C'A'B'$ este patrulater inscriptibil, adică A_1' se găseşte pe cercul determinat de A', B', C'. Analog se arată că şi B_1', C_1' se află pe acelaşi cerc. Cele nouă puncte se găsesc pe acelaşi cerc, numit cercul lui Euler, în care $[A_1'A']$, $[B_1'B']$, $[C_1'C']$ sunt diametre.

2. *Se consideră triunghiul ABC şi O, respectiv I centrele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC. Să se arate că $OI^2 = R^2 - 2Rr$, unde R, respectiv r sunt razele cercurilor circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC.*

Soluţie. Fie D punctul în care bisectoarea $(AD$ intersectează cercul, iar E şi F intersecţiile dreptei OI cu cercul circumscris triunghiului ABC. În triunghiul ABD, aplicând teorema sinusurilor, avem

$$\frac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}} = 2R \ \Rightarrow\ BD = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

În triunghiul AIM:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{IM}{AI} = \frac{r}{AI} \ \Rightarrow\ AI = \frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}.$$

Avem

$$m(\widehat{IBD}) = m(\widehat{IBC}) + m(\widehat{CBD}) = \frac{m(\widehat{B})}{2} + m(\widehat{CAD})$$
$$= \frac{m(\widehat{ABC})}{2} + \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BC})}{4};$$

Capitolul 2

Elemente de trigonometrie

2.1 Aplicaţii directe

2.1.1 Probleme rezolvate

1. *Să se demonstreze că:*

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{4}.$$

Soluţie. Folosind formulele:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x \quad \text{şi}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

avem

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{4}}=\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}=\operatorname{tg}\frac{x}{4}.$$

2. *Arătaţi că:*

$$\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+4\operatorname{tg} 4x+8\operatorname{ctg} 8x=\operatorname{ctg} x.$$

Soluţie. Folosind identitatea

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x,$$

membrul stâng devine:

$$\operatorname{ctg} x-2\operatorname{ctg} 2x+2(\operatorname{ctg} 2x-2\operatorname{ctg} 4x)+4(\operatorname{ctg} 4x-2\operatorname{ctg} 8x)+8\operatorname{ctg} 8x=\operatorname{ctg} x.$$

3. *Arătaţi că:*

$$P = \sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14} = \frac{1}{8}.$$

Soluţie.

$$P = \frac{2\sin\frac{\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{2\sin\frac{2\pi}{14}\cos\frac{2\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{4\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{4\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{2\cos\frac{3\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\sin\frac{6\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{8\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{8}.$$

4. *Să se demonstreze că pentru orice* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *are loc relaţia:*

$$\sqrt{2+2\cos x}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$

Soluţie. Fiecare factor din membrul stâng se poate scrie:

$$\sqrt{2+2\cos x} = \sqrt{2(1+\cos x)} = \sqrt{2^2\cos^2\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{2}} = 2\cos\frac{x}{2^2} = 2\cos\frac{x}{4},$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cos x}}} = \sqrt{2+2\cos\frac{x}{4}} = 2\cos\frac{x}{2^3} = 2\cos\frac{x}{8};$$

astfel avem:

$$8\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8} = \frac{4\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\left(2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\right)}{\sin\frac{x}{8}}$$

$$= \frac{2\cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{4}\sin\frac{x}{4}\right)}{\sin\frac{x}{8}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{8}} = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{8}}.$$