

DANIEL VLĂDUCU

MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele IX-XII

Ediția a II-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran

Tehnoredactare & pregătire de tipar: Marius Badea

Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

VLĂDUCU, DANIEL

**Memorator de matematică pentru clasele IX-XII / Daniel
Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 2-a. - Pitești : Paralela 45, 2019
ISBN 978-973-47-2896-1**

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2019

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de
proprietate intelectuală.

CUPRINS

ALGEBRĂ	9
1. Formule de calcul prescurtat	9
2. Sume remarcabile	9
3. Modulul	10
4. Partea întreagă, partea fracționară.....	11
5. Inegalități remarcabile	11
6. Elemente de logică matematică, mulțimi	13
7. Inducție matematică, probleme simple de numărare.....	14
8. Puteri și radicali	14
9. Logaritmi	15
10. Progresii aritmetice, progresii geometrice.....	16
11. Elemente de combinatorică.....	17
12. Binomul lui Newton.....	18
13. Funcții, funcția de gradul I.....	18
14. Ecuația de gradul al II-lea.....	20
15. Funcția de gradul al II-lea.....	21
16. Funcții injective, surjective, bijective	24
17. Funcția putere, funcția radical, ecuații	24
18. Funcția exponențială, funcția logaritmică	25
19. Funcții trigonometrice.....	26
20. Matematici financiare	27
21. Elemente de statistică.....	28
22. Probabilitate	29
23. Variabile aleatoare	31
24. Numere complexe sub formă algebrică.....	31

25. Aplicații în geometria plană.....	33
26. Forma trigonometrică a unui număr complex, operații, ecuații, aplicații.....	33
27. Permutări	34
28. Determinanți	35
29. Inversa unei matrice.....	35
30. Rangul unei matrice	36
31. Sisteme liniare	36
32. Legi de compoziție.....	38
33. Structuri algebrice.....	39
34. Inele de polinoame.....	41
35. Polinoame cu coeficienți complecși.....	43
TRIGONOMETRIE	45
1. Elemente de trigonometrie.....	45
2. Formule trigonometrice	46
3. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană.....	48
ANALIZĂ MATEMATICĂ	51
I. ȘIRURI	51
1. Șiruri monotone.....	51
2. Șiruri mărginite.....	51
3. Limita unui șir	51
4. Șiruri convergente	52
5. Convergență și mărginire.....	53

6. Criterii de convergență/divergență a șirurilor	53
7. Operații cu șiruri convergente	54
8. Cazuri de trecere la limită rezolvate	55
9. Cazuri de nedeterminare (exceptate)	57
10. Limite remarcabile de șiruri.....	57
II. LIMITE DE FUNCȚII	58
1. Limita unei funcții într-un punct.....	58
2. Limite laterale.....	58
3. Limite remarcabile.....	59
III. FUNCȚII CONTINUE	61
1. Noțiuni generale	61
2. Clase de funcții continue	61
3. Proprietățile funcțiilor continue	61
IV. FUNCȚII DERIVABILE.....	63
1. Noțiuni generale	63
2. Clase de funcții derivabile	63
3. Reguli de derivare.....	64
4. Derivata unei funcții compuse	64
5. Derivata unei funcții inverse.....	64
6. Derivatele funcțiilor elementare și compuse.....	65
7. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor.....	67
Teorema lui Fermat	67
Teorema lui Rolle.....	67
Teorema lui Cauchy	67
Teorema lui Lagrange	68
Teorema lui Darboux	69

Regula lui l'Hospital	69
8. Convexitate și concavitate. Puncte de inflexiune.....	70
9. Puncte unghiulare și puncte de întoarcere.....	71
10. Asimptote	71
Asimptote orizontale	71
Asimptote verticale	71
Asimptote oblice	72
V. PRIMITIVE	73
1. Noțiuni generale	73
2. Integrala nedefinită.....	73
3. Clase de funcții care admit primitive.....	74
4. Integrare. Metode de integrare.....	74
Metoda de integrare prin părți.....	74
Metoda schimbării de variabilă	75
5. Primitive uzuale.....	75
Primitivele funcțiilor elementare.....	75
VI. INTEGRALE DEFINITE.....	78
1. Diviziuni.....	78
2. Sume Darboux, sume Riemann	79
3. Integrala definită.....	80
Funcții integrabile în sens Riemann	80
4. Clase de funcții integrabile	80
5. Proprietăți ale integralelor definite	81
Proprietatea de liniaritate	81
Proprietatea de monotonie.....	81
Proprietăți ale integralei ca funcție de interval	82

6. Formula Leibniz-Newton	82
7. Formula de medie	82
8. Formula de integrare prin părți	82
9. Formula schimbare de variabilă.....	83
10. Aplicații ale integralelor definite	83
GEOMETRIE VECTORIALĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	85
I. VECTORI LEGAȚI	85
1. Noțiuni generale	85
Direcție.....	85
Sens.....	85
Lungime	85
2. Vectori legați echipolenți.....	86
3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat....	86
II. VECTORI LIBERI	87
1. Noțiuni generale	87
2. Operații cu vectori liberi.....	87
Adunarea vectorilor liberi	87
Scăderea vectorilor liberi	88
Înmulțirea unui vector liber cu un număr real	88
3. Vectorul de poziție	89
4. Vectori paraleli	90
5. Lungimea unui vector liber în plan.....	90
6. Produsul scalar a doi vectori liberi în plan.....	91
7. Lungimea unui vector liber în spațiu	92
8. Produsul scalar a doi vectori liberi în spațiu	92

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
REPER CARTEZIAN ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU	93
1. Reperul cartezian	93
2. Distanța dintre două puncte în plan	95

ALGEBRĂ



FORMULE DE CALCUL PRECURTAT

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}), \forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \left((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \left((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac) \right);$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$



SUME REMARCABILE

- $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$



MODULUL

Definiție: Modulul sau valoarea absolută a unui număr real este distanța, pe axa numerelor reale, dintre reprezentarea numărului și origine.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice}$$

expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Proprietăți:

- $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;
- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$;
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$; $\exists \text{ „}=\text{”} \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$;