EDITURA PARALELA 45

colecția

concursuri școlare

Autorii aduc mulțumiri speciale Societății de Științe Matematice din România pentru sprijinul acordat.

Redactare: Amalia Mărășescu
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Ionuț Broștianu

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : olimpiade și concursuri școlare : clasele IX-XII : 2016-2017 /
Emilia-Ștefania Răducan, Gabriela Roxana Bondoc, Carmen-Victorița Chirfot, ... ; coord.: Gheorghe Căiniceanu. - Pitești : Paralela 45, 2017
ISBN 978-973-47-2530-4

I. Răducan, Emilia-Ștefania
II. Bondoc, Gabriela Roxana
III. Chirfot, Carmen-Victorița
IV. Căiniceanu, Gheorghe (coord.)

51

© Copyright Editura Paralela 45, 2017
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

EDITURA PARALELA 45

Gheorghe Căiniceanu
(coordonator)
Emilia-Ștefania Răducan, Gabriela Roxana Bondoc,
Carmen-Victorița Chirfot, Mariana Draga-Tătucu,
Iuliana Gimoiu, Dan Nănuți, Dana-Mariana Paponiu,
Vasile-Doru Preșneanu, Elena Rîmniceanu,
Tomiță-Constantin Vasile

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2016-2017

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

9.O.1. Arătaţi că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, au loc afirmaţiile:

a) există şi sunt unice $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\left(5+2\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$;

b) $a_n^2 - 6b_n^2 = 1$;

c) $\left[\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\right]$ este număr impar.

9.O.2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac condiţia: $f(x+y) = x + f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

9.O.3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu ortocentrul H, centrul cercului circumscris O. Notăm cu X, Y, Z centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HAC, respectiv HAB. Demonstraţi că:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{OH}.$$

Supliment *Gazeta Matematică* 10/2016

9.O.4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Arătaţi că, dacă $x \in (0, n]$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{x^2 - x + n} \leq \frac{n+1-x}{n^2}.$$

b) Arătaţi că, dacă $a_1, a_2, ..., a_n \in (0, n]$, cu $a_1 + a_2 + ... + a_n = n$, atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a_1^2 + a_2 + a_3 + ... + a_n} + \frac{1}{a_2^2 + a_1 + a_3 + ... + a_n} + ... + \frac{1}{a_n^2 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}} \leq 1.$$

Supliment *Gazeta Matematică* 11/2016 (enunț modificat)

EDITURA PARALELA 45

clasa a X-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

10.O.1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor complexe ecuaţia:

$$|z|^4 + z^2 + \overline{z}^2 - 4z - 4\overline{z} + 5 = 0.$$

10.O.2. Determinaţi funcţiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ care satisfac condiţia:

$$f\left(\frac{x}{f(y)}\right) = \frac{x}{f\left(x\sqrt{y}\right)},\ \forall\, x, y \in (0, \infty).$$

Supliment *Gazeta Matematică* 11/2015

10.O.3. Se dau numerele reale $a, b, c, d \in (1, \infty)$ şi $x, y, z, t \in (0, \infty)$ astfel încât:

$$a^x = bcd,\ b^z = cda,\ c^z = dab \text{ şi } d^t = abc.$$

Arătaţi că:

$$\frac{1}{4+x} + \frac{1}{4+y} + \frac{1}{4+z} + \frac{1}{4+t} \le \frac{4}{7}.$$

10.O.4. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, strict pozitive, astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Demonstraţi că:

$$\frac{\log^2_{a_1} a_2}{\sqrt{a_1}} + \frac{\log^2_{a_2} a_3}{\sqrt{a_2}} + ... + \frac{\log^2_{a_{n-1}} a_n}{\sqrt{a_{n-1}}} + \frac{\log^2_{a_n} a_1}{\sqrt{a_n}} \ge n\sqrt{n}.$$

Arad

10.O.5. Fie $a \in [-1, 1]$. Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt{1+ax} - \sqrt{1-ax} = x$. Discuţie.

10.O.6. Vezi problema **10.O.2.**, Olimpiada locală Alba.

10.O.7. Aflaţi perechile (x, y) de numere strict pozitive pentru care

$$x + y \le xy \text{ şi } (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \le 2.$$

10.O.8. Fie $z \in \mathbb{C}$. Determinaţi valoarea minimă a lui $|z|$, dacă $|z - 3i| + |z - 4| = 5$.

EDITURA PARALELA 45

clasa a XI-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Alba

11.O.1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinaţi toate matricele $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $A^{2017} = -I_n$ pentru care există două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ care comută şi verifică egalităţile:

$$X + Y = I_n,\ A \cdot X = X^2 \text{ şi } A \cdot Y = -Y^2.$$

Gazeta Matematică 10/2016

11.O.2. Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 + B^2 = \sqrt{3}\,(AB - BA)$ şi matricea $C = (A - iB)(A + iB)$.

a) Arătaţi că numărul $\det C$ este real pozitiv.

b) Dacă matricea $AB - BA$ este inversabilă, arătaţi că n este divizibil cu 6.

11.O.3. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir definit prin $x_0 = 1$ şi $x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}$, $\forall\ n \geq 0$. Calculaţi limita şirului $\dfrac{x_n}{2^n}$.

11.O.4. Se dă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $x_0 = x_1 = 1$ şi $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{x_{n-1}}$, $\forall\ n \geq 1$.

a) Arătaţi că $\dfrac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{x_{n+1} + x_{n-1}}{x_n}$, $\forall\ n \geq 1$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n+1} \cdot x_n}{\left(1 + \sqrt{5}\right)^{2n}} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}$.

Arad

11.O.5. Fie matricea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = O_3$. Arătaţi că:

$$a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31} \leq a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2.$$

EDITURA PARALELA 45

CUPRINS

EDITURA PARALELA 45