

EDITURA PARALELA 45



Editor: Călin Vlasie

Corectură și culegere computerizată: autorul

Coperta: Ionuț Broștianu

Prepress: Marius Badea

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**SITARU, DANIEL**

**Fenomen algebric** / Daniel Sitaru. - Pitești : Paralela 45, 2017

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2522-9

51

**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45

Pitești, jud. Argeș, cod 110174, str. Frații Golești 130

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444

0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492.

E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)

sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: [tipografie@edituraparelela45.ro](mailto:tipografie@edituraparelela45.ro)

Copyright © Editura Paralela 45, 2017

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,

iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Daniel Sitaru

---

---

**FENOMEN ALGEBRIC**

---

---



*Editura Paralela 45*

## CUPRINS

Capitolul 1 – Teoreme celebre .....	7
Capitolul 2 – Algebră – Enunțuri .....	27
Capitolul 3 – Algebră – Soluții .....	72
<i>Bibliografie</i> .....	288

**Inegalitatea CAUCHY-SCHWARZ**

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2); a, b, x, y \in \mathbb{R}$$

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2); a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right); a_i, x_i \in \mathbb{R}; i \in \overline{1, n}$$

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}; a, b \in \mathbb{R}; x, y \in (0, \infty)$$

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}; a, b, c \in \mathbb{R}; x, y, z \in (0, \infty)$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}; a, b, c, x, y, z \in (0, \infty)$$

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}; a_i \in \mathbb{R}; x_i > 0; i \in \overline{1, n}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}; (\forall) a, b, c \in (0, \infty)$$

$$\frac{a}{b+nc} + \frac{b}{c+na} + \frac{c}{a+nb} \geq \frac{3}{n+1}; a, b, c \in (0, \infty); n \in \mathbb{N}^*$$

**Inegalitatea MINKOWSKI**

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{(x+y+z)^2 + (a+b+c)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2} + \sqrt{z^2 + c^2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sqrt{(x_1+a_1)^2 + (x_2+a_2)^2 + \dots + (x_n+a_n)^2}$$

$$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} + \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

$$x_i; a_i \in \mathbb{R}; i \in \overline{1, n}; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p > 1; x_i, y_i \in \mathbb{R}; i \in \overline{1, n}; n \in \mathbb{N}^*$$

1. Să se găsească minimul expresiei:

$$E = \frac{4ab - 11a^2 - 14b^2}{3(a^2 + b^2)}; a, b \in \mathbb{R}^*$$

2. Să se arate că dacă  $a, b, c \in (0, \infty)$  atunci:

$$\sum a^2 \left( \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} \right) > \frac{3}{4031}$$

3. Să se arate că dacă  $a, b, c \in (0, \infty); m \in \mathbb{R}^*, a + b + c = \frac{2}{m^2}$  atunci:

$$\sqrt{m^2a + 1} + \sqrt{m^2b + 1} + \sqrt{m^2c + 1} \leq 4$$

4. Să se arate că dacă  $a, b, c \in \left(\frac{1}{k}, \infty\right); k > 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2k$  atunci:

$$\sqrt{ka - 1} + \sqrt{kb - 1} + \sqrt{kc - 1} \geq \sqrt{a + b + c}$$

5. Să se arate că dacă  $x, y, z \geq 0; t \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}, x + y + z = 6t$  atunci:

$$x\sqrt{y+n} + y\sqrt{z+n} + z\sqrt{x+n} \leq \sqrt{3}(6t^2 + (3n+1)t)$$

6. Să se arate că dacă  $x, y, z \geq 0$  și  $x + y + z = 2$  atunci:

$$x\sqrt{y+1} + y\sqrt{z+1} + z\sqrt{x+1} \leq 2\sqrt{3}$$

7. Să se arate că dacă  $a, b, c, d \in (0, \infty); \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{d}$  atunci:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a-d)(b-d)(c-d)} \geq 27$$

1. Să se găsească minimul expresiei:

$$E = \frac{4ab - 11a^2 - 14b^2}{3(a^2 + b^2)}; a, b \in \mathbb{R}^*$$

Soluție:

$$\begin{aligned} E &= \frac{4ab - 11a^2 - 14b^2}{3(a^2 + b^2)} = \frac{4a^2 + b^2 + 4ab - 15a^2 - 15b^2}{3(a^2 + b^2)} = \\ &= \frac{(2a+b)^2 - 15(a^2 + b^2)}{3(a^2 + b^2)} = \frac{(2a+b)^2}{3(a^2 + b^2)} - 5 \geq -5, \quad \min E = -5 \text{ pentru } 2a + b = 0 \end{aligned}$$

2. Să se arate că dacă  $a, b, c \in (0, \infty)$  atunci:

$$\sum a^2 \left( \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} \right) > \frac{3}{4031}$$

Soluție:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{b^2}{2016b^2 + 2015a^2} &> \frac{(a+b)^2}{4031(a^2 + b^2)} > \frac{1}{4031} \cdot \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} > \frac{1}{4031} \\ \text{deoarece } \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2} &> 1; (a+b)^2 > a^2 + b^2, a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2; 2ab > 0 \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2016a^2 + 2015c^2} + \frac{c^2}{2016c^2 + 2015a^2} &> \frac{1}{4031} \\ \frac{b^2}{2016b^2 + 2015c^2} + \frac{c^2}{2016c^2 + 2015b^2} &> \frac{1}{4031} \\ \sum a^2 \left( \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} + \frac{1}{2016a^2 + 2015b^2} \right) &> \frac{3}{4031} \end{aligned}$$

3. Să se arate că dacă  $a, b, c \in (0, \infty)$ ;  $m \in \mathbb{R}^*$ ,  $a + b + c = \frac{2}{m^2}$  atunci:

$$\sqrt{m^2 a + 1} + \sqrt{m^2 b + 1} + \sqrt{m^2 c + 1} \leq 4$$

## Bibliografie

1. D.M. Bătinețu-Giurgiu, Maria Bătinețu-Giurgiu, I. Bîrchi-Damian, A. Semenescu: *Analiză Reală* – Editura „Matrix – Rom” – București, 2004.
2. Gh. Sirețchi: *Calcul diferențial și integral*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
3. Dragoș Popescu, George Oboroceanu: *Exerciții și probleme de algebră combinatorică și teoria numerelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
4. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Gheorghe Bordea: *Algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, Editura Topaz, Constanța, 1993.
5. Gheorghe Andrei, Constantin Caragea, Viviana Ene: *Algebră pentru concursuri de admitere și olimpiade școlare*, Editura Scorpion, București, 1995.
6. Ion Savu & colaboratori: *Probleme pregătitoare pentru olimpiade școlare*, Editura Art, București, 2006.
7. M. Popescu, D. Sitaru: *Concursul „Traian Lalescu”. Probleme de geometrie*, Litografia Universității din Craiova, Craiova, 1985.
8. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Concursul național de matematici aplicate – „Adolf Haimovici” – etapa județeană*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
9. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Concursul național de matematici aplicate – „Adolf Haimovici” – etapa națională*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
10. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Probleme de concurs*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
11. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Bacalaureat – Probleme – Teste – Subiecte*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2011.
12. Daniel Sitaru: *Probleme de geometrie afină și euclidiană*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2012.
13. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Bacalaureat – Probleme – Teste – Subiecte – 2010 – 2013*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2012.
14. Daniel Sitaru: *Geometrie hipercomplexă și cuaternionică*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
15. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Bazele algebrei*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
16. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Lecții de matematică*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2013.
17. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Bazele analizei matematice*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2014.
18. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți: *Matematici pentru olimpiade*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2014.
19. Daniel Sitaru, Claudia Nănuți, Leonard Giugiuc, Diana Trăilescu: *Inegalități – Inequalities*, Editura Ecko – Print, Drobeta Turnu Severin, 2015.
20. Daniel Sitaru: *Math Phenomenon*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.
21. Daniel Sitaru, Radu Gologan, Leonard Giugiuc: *300 Romanian Mathematical Challenges*, Editura Paralela 45, Pitești, 2016.