Coordonatori
DANA HEUBERGER NICOLAE MUŞUROIA

Nicolae Muşuroia Gheorghe Boroica Vasile Pop
Dana Heuberger Florin Bojor

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a X-a

Ediţia a II-a, revizuită

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

TESTE INIŢIALE

TESTUL I.1

I.1.1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{5}{6}$ şi $(n+1)a_{n+1} = (n-1)a_n$, $\forall\, n \geq 2$. Arătaţi că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n < 2$.

Lucian Dragomir, G.M. 6-7-8/2012

I.1.2. Fie $A = \overline{a_1 a_2 a_3}$, $B = \overline{b_1 b_2 b_3}$, $C = \overline{c_1 c_2 c_3}$ numere de trei cifre cu a_1, a_2, a_3 nenule. Arătaţi că dacă ecuaţia $Ax^2 + Bx + C = 0$ are rădăcinile reale, atunci cel puţin una dintre ecuaţiile $a_i x^2 + b_i x + c_i = 0$, $i \in \{1, 2, 3\}$ are soluţii reale.

Nicolae Muşuroia,
Concursul „Nicolae Păun", 2007

I.1.3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care $m(\sphericalangle DAC) = 10°$, $m(\sphericalangle DCA) = 20°$, $m(\sphericalangle BAC) = 30°$ şi $m(\sphericalangle BCA) = 50°$. Arătaţi că diagonalele sale sunt perpendiculare.

Orest Bucicovski, G.M. 2/2009

I.1.4. Fie $\triangle ABC$ în care $b + c = 2a$, $b > c$ şi fie punctul $P \in (BC)$ cu $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{b-c}{6a}$.

a) Arătaţi că $IG \parallel BC$.

b) Arătaţi că segmentele (BI), (CP) şi (BG) pot fi lungimile laturilor unui triunghi. (Notaţiile sunt cele cunoscute.)

TESTUL I.2

I.2.1. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-5)^2}$ şi $g(x) = \sqrt{(x+2)^2 + (x^2+1)^2}$. Determinaţi minimul funcţiei $f + g$ şi maximul funcţiei $g - f$.

Vasile Pop

I.2.2. Se consideră numărul natural a şi expresia $E(a) = \{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{a}\}^2 + \{\sqrt{a}\}^3$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x. Demonstraţi că $E(a)$ este un număr raţional dacă şi numai dacă numărul a este pătrat perfect.

Florin Bojor

I.R.1.4. a) $\overrightarrow{GI}=\dfrac{a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}}{a+b+c}=\dfrac{-\frac{2}{3}a\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}-\frac{2}{3}b\cdot\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}-\frac{2}{3}c\cdot\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}}{a+b+c}=$

$=\dfrac{(-a+b)\overrightarrow{AB}+(-b+c)\overrightarrow{BC}+(-a+c)\overrightarrow{AC}}{3(a+b+c)}=\dfrac{(-2a+b+c)\overrightarrow{AB}+(-a-b+2c)\overrightarrow{BC}}{3(a+b+c)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI}=\dfrac{-a-b+2c}{3(a+b+c)}\overrightarrow{BC}=\dfrac{c-b}{6a}\overrightarrow{BC}$. Rezultă $IG \parallel BC$ şi $\dfrac{GI}{BC}=\dfrac{b-c}{6a}$;

b) $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{GI}=\dfrac{b-c}{6a}\overrightarrow{BC}+\dfrac{c-b}{6a}\overrightarrow{BC}=\vec{0}.$

TESTUL I.2

I.R.2.1. Utilizând inegalitatea lui Minkovski avem $f(x)+g(x)=\sqrt{(x-1)^2+(x^2-5)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(x^2+1)^2}=\sqrt{(1-x)^2+(5-x^2)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(x^2+1)^2}\geq\sqrt{(1-x+x+2)^2+(5-x^2+x^2+1)^2}=3\sqrt{5}$. Egalitatea are loc dacă $(1-x)(x^2+1)=(5-x^2)(x+2)\Rightarrow x\in\{-1,\ 3\}$ şi $(1-x)\cdot(x+2)+(5-x^2)(x^2+1)\geq 0$, care este verificată doar de $x=-1$. Aşadar minimul funcţiei $f+g$ este $f(-1)+g(-1)=3\sqrt{5}$. Folosind aceeaşi inegalitate vom determina $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, astfel încât să avem: $g(x)-f(x)\leq\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, avem $\sqrt{(x-1)^2+(x^2-5)^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\geq\sqrt{(x+2)^2+(x^2+1)^2}$, care este adevărată, din inegalitatea lui Minkovski, dacă $x-1+\alpha=x+2$ şi $x^2-5+\beta=x^2+1$, de unde obţinem $\alpha=3,\ \beta=6$. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow\begin{cases}3(x-1)+6(x^2-5)\geq 0\\ 6(x-1)=3(x^2-5)\end{cases}\Leftrightarrow x=3$. Prin urmare, maximul este $3\sqrt{5}$, care este atins în $x=3$.

I.R.2.2. Dacă a este pătrat perfect rezultă că $E(a)=0\in\mathbb{Q}$. Presupunem că există un număr întreg a care nu e pătrat perfect, dar $E(a)\in\mathbb{Q}$. Însă: $E(a)=\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]+\left(\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]\right)^2+\left(\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]\right)^3=\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]+a-2\left[\sqrt{a}\right]\sqrt{a}+\left[\sqrt{a}\right]^2+a\sqrt{a}-3\left[\sqrt{a}\right]a+3\left[\sqrt{a}\right]^2\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]^3$. Deoarece $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$ avem că $E(a)\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 1-2\left[\sqrt{a}\right]+a+3\left[\sqrt{a}\right]^2=0$. Notăm $\left[\sqrt{a}\right]=t\Rightarrow t\in\mathbb{N}$ şi $3t^2-2t+1+a=0.$

Dar $\Delta=-12a-8<0$, de unde rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci a este pătrat perfect.

CAPITOLUL 1. ECUAŢII EXPONENŢIALE ŞI LOGARITMICE NONSTANDARD

Noţiunile „problemă standard” şi „problemă nonstandard” sunt relative. Orice problemă a cărei rezolvare nu este cunoscută, poate reprezenta, la un moment dat, o problemă nonstandard.

Vom numi problemă nonstandard o problemă a cărei rezolvare nu se bazează pe un algoritm cunoscut. Prin urmare, nu există metode generale de rezolvare a acestor probleme. Vom indica câteva direcţii de abordare. Tehnicile utilizate apelează la: studiul monotoniei, studiul convexităţii unor funcţii, inegalităţi clasice etc.

UTILIZAREA MONOTONIEI UNOR FUNCŢII

1.1. Propoziţie. Dacă funcţia f este strict monotonă pe intervalul I din $\mathbb{R}$, iar c este o constantă reală, atunci ecuaţia $f(x) = c$ are pe intervalul I cel mult o soluţie.

Demonstraţie: Fie f o funcţie strict crescătoare. Presupunem că ecuaţia $f(x) = c$ are pe intervalul I cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2. Fie $x_1 < x_2$. Deoarece pe intervalul I f este strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$. Contradicţie cu $f(x_1) = f(x_2) = c$.

Analog, dacă f este funcţie strict descrescătoare.

1.2. Propoziţie. Dacă funcţiile f şi g sunt monotone pe intervalul I, de monotonii diferite, cel puţin una dintre ele fiind strict monotonă, atunci ecuaţia $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluţie pe intervalul I.

Demonstraţie: Fie f strict crescătoare, iar g descrescătoare pe intervalul I. Presupunem că există cel puţin două soluţii diferite x_1, x_2, din intervalul I, ale ecuaţiei $f(x) = g(x)$. Fie $x_1 < x_2$. Din f strict crescătoare rezultă $f(x_1) < f(x_2)$.
Dar: $f(x_1) = g(x_1) \geq g(x_2) = f(x_2)$, deci contradicţie.

Amintim, fără demonstraţie, alte câteva rezultate cunoscute din teoria funcţiilor.

1.3. Propoziţie. Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Dacă f şi g sunt funcţii strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci $f + g$ este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

b) Dacă $f, g : A \to (0, \infty)$ sunt funcţii strict crescătoare (descrescătoare) pe A, atunci $f \cdot g$ este o funcţie strict crescătoare (descrescătoare) pe A.

1.4. Propoziţie. Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a) Dacă f şi g sunt funcţii strict crescătoare, atunci $g \circ f$ este o funcţie strict crescătoare.

b) Dacă f şi g sunt funcţii strict descrescătoare, atunci $g \circ f$ este o funcţie strict crescătoare.