Capitolul 1 **GRUPURI**

1. Lege de compoziție internă, tabla operației

1.1. Noțiuni recapitulative

Au fost studiate mulțimile de numere: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$ – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale;

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ – mulțimea numerelor complexe.

Mulțimile de numere studiate au proprietatea: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ne reamintim produsul cartezian a două mulțimi. Fie A și B două mulțimi. Produsul cartezian al celor două mulțimi este: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

EXEMPLE

1. Dacă $A = \{-2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 5\}$, avem:
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = \{(-2, 1), (-2, 2), (-2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}$.

2. Dacă $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.
$A \times B = \{(a, \alpha), (a, \beta), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma)\}$.

Aceste mulțimi au fost dotate cu diferite operații. De exemplu, pe mulțimea numerelor naturale au fost definite operațiile de **adunare** și **înmulțire**:

$\forall\, x, y \in \mathbb{N}$ avem $\quad x + y \in \mathbb{N}$ și $xy \in \mathbb{N}$

pentru care am acceptat anumite proprietăți:

A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$;
A2. $0 + x = x + 0 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$;
A3. $x + y = y + x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$;
I1. $(xy)z = x(yz)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$;
I2. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$;
I3. $xy = yx$, $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$.
D. $x(y + z) = xy + xz$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$.

Odată cu studiul altor mulțimi, au fost acceptate alte proprietăți. Astfel, în mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, operațiile de **adunare** și **înmulțire** satisfac în plus față de A1, A2, A3, I1, I2, I3, D și proprietatea:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}.$$

Un studiu atent ne permite să stabilim unele caracteristici comune ale operațiilor cunoscute și să facem anumite generalizări.

Astfel, pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, operația de adunare ne permite să definim aplicația:

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (x, y) \to \varphi(x, y),$$

prin care facem să corespundă la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale un număr natural, unic determinat, $\varphi(x, y) = x + y$ numit **suma** lui x cu y.

În mod analog, înmulțirea numerelor naturale ne permite să definim aplicația:

$$\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (x, y) \to \Psi(x, y),$$

prin care la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale, asociem un număr natural unic determinat $\Psi(x, y) = xy$, numit **produsul** lui x cu y.

EXEMPLU

$\varphi(5, 2) = 5 + 2 = 7$, $\varphi(3, 8) = 3 + 8 = 11$,
respectiv
$\Psi(5, 2) = 5 \times 2 = 10$, $\Psi(3, 8) = 3 \times 8 = 24$.

Vom remarca faptul că observații similare pot fi făcute în studiul altor mulțimi.

Fie mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a matricelor pătratice de ordin 2 cu coeficienți din $\mathbb{R}$.

Pentru operația de adunare am asociat fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ prin aplicația: $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \to \varphi(A, B) = A + B$, numită **operația de adunare** a matricelor.

EXEMPLU

Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

Avem: $\varphi(A, B) = A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$,

respectiv $\Psi(A, B) = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$.

Considerând mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ putem defini aplicațiile:

$$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (z_1, z_2) \to \varphi(z_1, z_2) = z_1 + z_2,$$

prin care, fiecărei perechi ordonate (z_1, z_2) de numere complexe, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, i se asociază numărul complex $z_1 + z_2$, aplicația este numită **operația de adunare** a numerelor complexe.

De asemenea, am asociat fiecărei perechi ordonate (z_1, z_2) de numere complexe, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, numărul complex $z_1z_2 \in \mathbb{C}$ prin aplicația:

$$\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ (z_1, z_2) \to \Psi(z_1, z_2) = z_1z_2,$$

numită **operația de înmulțire** a numerelor complexe.

EXEMPLU

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, unde $z_1 = x_1 + iy_1$, $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, și $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\varphi(z_1, z_2) = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

respectiv

$$\Psi(z_1, z_2) = z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Exemplele pot continua, considerând și alte mulțimi.

Observațiile asupra acestor aplicații ne permit să surprindem într-o schemă generală situații asemănătoare celor prezentate mai sus. Pentru aceasta vom considera o mulțime nevidă M și o aplicație

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \to \varphi(x, y),$$

în care este ignorată natura elementelor mulțimii M, cum și regula efectivă prin care oricărui cuplu (x, y) de elemente din M i se asociază un element unic $\varphi(x, y) \in M$.

Obținem astfel noțiunea de **lege de compoziție** pe mulțimea M.

1.2. Definiție. Exemple

Defintie

Fie M o mulțime nevidă. O aplicație φ definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M,

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \to \varphi(x, y),$$

se numește **lege de compoziție** pe M.

Elementul unic determinat $\varphi(x, y) \in M$ care corespunde cuplului $(x, y) \in M \times M$ prin aplicația φ se numește **compusul** lui x cu y prin legea de compoziție φ.

O **lege de compoziție** pe o mulțime M se mai numește **operație binară** pe M sau **operație algebrică** pe M. În cele ce urmează vom prefera să folosim pentru aplicația φ denumirea de **lege de compoziție**.

EXEMPLE

Prezentăm câteva exemple de legi de compoziție cunoscute:

1. *Adunarea pe* $\mathbb{Z}$: $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to \varphi(x, y) = x + y$.

2. *Înmulțirea pe* $\mathbb{Z}$: $\Psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to \Psi(x, y) = xy$.

3. *Adunarea pe* $\mathbb{R}$: $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to \varphi(x, y) = x + y$.

4. *Înmulțirea pe* $\mathbb{R}$: $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to \Psi(x, y) = x \cdot y$.

1.2.1. Notații pentru o lege de compoziție

Notația aditivă: $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = x + y$. Elementul $x + y$ se numește **suma** lui x cu y, iar legea de compoziție φ se numește **adunare**.

Notația multiplicativă: $\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(x, y) = xy$. Elementul xy se numește **produsul** lui x cu y, iar legea de compoziție φ se numește **înmulțire**.

Vom remarca faptul că pentru o lege de compoziție vor fi utilizate diferite notații pentru compusul $\varphi(x, y)$ a lui x cu y, cum ar fi:

$$x * y,\ x \perp y,\ x \top y,\ x \circ y,\ x \wedge y,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ x \odot y,\ x \otimes y,\ x \triangle y,\ x \triangledown y \text{ etc.}$$

EXEMPLE

1. Folosind notația aditivă pentru $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$, avem legile de compoziție:

$$\varphi : M \times M \to M,\ \varphi(a, b) = a + b.$$

2. În notație multiplicativă, avem legile de compoziție:

$\varphi : M \times M \to M$, $\varphi(a, b) = ab$.

3. Reuniunea pe $\mathcal{P}(E)$ mulțimea părților mulțimii E:

$\varphi : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $\varphi(X, Y) = X \cup Y$.

4. Intersecția pe $\mathcal{P}(E)$, mulțimea părților mulțimii E:

$\varphi : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $\varphi(X, Y) = X \cap Y$.

5. Compunerea funcțiilor pe $\mathcal{F}(E)$, mulțimea funcțiilor definite pe E cu valori în E:

$\varphi : \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $\varphi(f, g) = f \circ g$.

Considerând mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi și $n \in \mathbb{N}^*$, un număr natural, este cunoscută definiția împărțirii cu rest (a împărțirii euclidiene). Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există $q, r \in \mathbb{Z}$, unic determinate, astfel încât $a = nq + r$, $0 \leq r < n$.

Numărul r din această relație este cunoscut sub numele de restul împărțirii lui a prin n. Acest număr va fi notat

$$r = a \bmod n$$

și se citește „a modulo n“. Acest număr se mai numește încă: **redusul modulo n** al numărului întreg a.

EXEMPLE

Dacă $n = 6$, avem:

$15 \bmod 6 = 3$;	$18 \bmod 6 = 0$;	$-9 \bmod 6 = 3$;
$-13 \bmod 6 = 5$;	$25 \bmod 6 = 1$;	$-11 \bmod 6 = 1$.

Acum putem defini legea de compoziție.

6. Adunarea modulo n. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, definim **suma modulo n** a lui a cu b, notată $a \oplus b$ astfel:

$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \to \varphi(a, b) = a \oplus b$ prin $a \oplus b \overset{\text{def.}}{=} (a + b) \bmod n$,

numită **adunarea modulo n**.

EXEMPLE

Dacă $n = 5$, avem:

$3 \oplus 8 = (3 + 8) \bmod 5 = 11 \bmod 5 = 1$;

$(-4) \oplus 7 = (-4 + 7) \bmod 5 = 3 \bmod 5 = 3$;

$9 \oplus (-12) = (9 + (-12)) \bmod 5 = (-3) \bmod 5 = 2$;

$10 \oplus 4 = (10 + 4) \bmod 5 = 14 \bmod 5 = 4$.

7. Înmulțirea modulo n. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, definim **produsul modulo n** al lui a cu b, notat cu $a \otimes b$ astfel:

$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \to \varphi(a, b) = a \otimes b$, prin $a \otimes b \overset{\text{def.}}{=} (ab) \bmod n$,

numită **înmulțirea modulo n**.

EXEMPLE

Dacă $n = 5$, avem:

$3 \otimes 7 = (3 \cdot 7) \bmod 5 = 21 \bmod 5 = 1;$

$4 \otimes 12 = (4 \cdot 12) \bmod 5 = 48 \bmod 5 = 3;$

$(-3) \otimes 8 = ((-3) \cdot 8) \bmod 5 = (-24) \bmod 5 = 1$

$(-4) \otimes (-13) = ((-4) \cdot (-13)) \bmod 5 = 52 \bmod 5 = 2.$

Efectuați în clasă

Dacă $n = 6$, calculați:

1 . **a)** $3 \oplus 13$; **b)** $4 \oplus 19$; **c)** $11 \oplus 17$; **d)** $(-3) \oplus 12$.

2 . **a)** $5 \otimes 11$; **b)** $7 \otimes 14$; **c)** $8 \otimes (-5)$; **d)** $(-9) \otimes (-12)$.

1.2.2. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Definiție

Fie M o mulțime pe care este dată o lege de compoziție φ:

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \to \varphi(x, y).$$

O submulțime H a lui M cu proprietatea:

$$\forall\ x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$$

se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziție φ.

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție M, putem defini pe H legea de compoziție: $\varphi' : H \times H \to H$, punând $\varphi'(x, y) \overset{\text{def.}}{=} \varphi(x, y) \in H,\ \forall\ x, y \in H$, și se spune că φ' este **legea de compoziție indusă** pe H de către φ.

EXEMPLE

Vom nota $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor întregi pare și $2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mulțimea numerelor întregi impare. Avem $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ și $2\mathbb{Z} + 1 \subset \mathbb{Z}$.

1. Mulțimea $2\mathbb{Z}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

Avem $M = \mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}$ și legea de compoziție:

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x + y.$

Dacă $x, y \in 2\mathbb{Z}$, $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$, deci

$+ : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$

(ceea ce exprimă faptul că suma a două numere întregi pare este un număr par), deci $H = 2\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

2. Mulțimea $2\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z}$, $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Atunci $xy = 2k_1 \cdot 2k_2 = 4k_1k_2 \in 2\mathbb{Z}$.

3. Mulțimea $2\mathbb{Z} + 1$ *nu este* parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1, x = 2k_1 + 1$ și $y = 2k_2 + 1, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Rezultă $x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1) \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

4. Mulțimea $2\mathbb{Z} + 1$ *este* parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de înmulțire.

Pentru $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1, x = 2k_1 + 1$ și $y= 2k_2 + 1, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, avem:

$$xy = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1,$$

deci $xy \in 2\mathbb{Z} + 1$, ceea ce demonstrează că $H = 2\mathbb{Z} + 1$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

5. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x * y,$$

unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6$.

Considerând submulțimea H a lui $\mathbb{R}$, $H = (2, \infty)$, să arătăm că submulțimea $(2, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$".

Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că $x * y \in \mathbb{R}$, unde $x * y = xy - 2x - 2y + 6 \in \mathbb{R}$.

Pentru $H = (2, +\infty)$, deducem că $\forall\, x, y \in H$, rezultă $x * y \in H$. Fie $x, y \in (2, +\infty)$, deci $x > 2, y > 2$ sau $x - 2 > 0, y - 2 > 0$. Legea de compoziție „$*$" se poate scrie sub forma: $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, de unde deducem $\underbrace{(x-2)(y-2)}_{>0} + 2 > 2$, deci $x * y \in H$, ceea ce demonstrează că $H = (2, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție.

1.2.3. Lege de compoziție internă

Legile de compoziție definite până acum sunt aplicații de forma:

$$\varphi : M \times M \to M, (x, y) \to \varphi(x, y) \in M,$$

unde M este o mulțime nevidă. Aceste aplicații se mai numesc **legi de compoziție interne**.

Vom sublinia proprietatea unei legi de compoziție internă φ care este definită pe $M \times M$ cu valori în M astfel încât compusul a două elemente $x, y \in M$ este de asemenea un element din M, deci $\varphi(x, y) \in M$.

EXEMPLE

1. Fie $M = (-1, \infty)$ pe care definim aplicația $\varphi : M \times M \to M, (x, y) \to \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} xy + x + y$.

Să dovedim că legea „$*$" este o lege de compoziție internă.

Să dovedim că oricare ar fi $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$. Putem scrie

$$x * y = xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 = (x + 1)(y + 1) - 1.$$

Din condiția $x, y \in (-1, \infty)$, deducem $x > -1, y > -1$, deci $x + 1 > 0, y + 1 > 0$, de unde rezultă $(x + 1)(y + 1) > 0$, prin urmare $(x + 1)(y + 1) - 1 > -1$, deci $x * y > -1$, de unde rezultă $x * y \in (-1, \infty)$.

2. Fie $M = (-1, 1)$ pe care este definită aplicația $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x+y}{1+xy}$. Vom arăta că aplicația „$*$“ este o lege de compoziție, cu alte cuvinte vom arăta că $\forall\, x, y \in (-1, 1)$ și compusul $x * y \in (-1, 1)$, deci $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

Această condiție este echivalentă cu sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{x+y}{1+xy}, \\ \dfrac{x+y}{1+xy} < 1 \end{cases} \text{, echivalent cu sistemul } \begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy} + 1 > 0 \\ 1 - \dfrac{x+y}{1+xy} > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 & (1) \\ \dfrac{(x-1)(y-1)}{1+xy} > 0 & (2) \end{cases}.$$

Din condiția $x \in (-1, 1)$ rezultă $-1 < x < 1$ și obținem $-1 < x$, deci $x + 1 > 0$, respectiv $x < 1$, $x - 1 < 0$.

Analog pentru $y \in (-1, 1)$ rezultă $y + 1 > 0$ și $y - 1 < 0$ deci $(x + 1)(y + 1) > 0$ (1′) și $(x - 1)(y - 1) > 0$ (1″).

Din $x, y \in (-1, 1)$, deducem $|x| < 1$ și $|y| < 1$, de unde rezultă $|x|\,|y| < 1$ sau $|xy| < 1$, deci $-1 < xy < 1$, adică $-1 < xy$, $1 + xy > 0$ (1‴) și obținem din (1′) și (1‴) respectiv (1″) și (1‴):

$$\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 \text{ și } \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} > 0,$$

ceea ce demonstrează că aplicația „$*$“ este o lege de compoziție internă pe $M = (-1, 1)$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $M = [3, +\infty)$ și aplicația $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Să demonstrăm că „$*$“ este o lege de compoziție internă.

Soluție

Pentru orice $x, y \in [3, +\infty)$, rezultă $x \geq 3$, $y \geq 3$, deci $x^2 \geq 9$, $y^2 \geq 9$, de unde deducem $x^2 + y^2 \geq 18$ sau $x^2 + y^2 - 9 \geq 3^2$, deci $\sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 3$, ceea ce demonstrează că $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 3$, $x * y \in [3, +\infty)$.

2. Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și legea de compoziție: $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $(A, B) \to AB$.

Dacă $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}, 4x^2 - 3y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$, să se demonstreze că H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție

Fie $A_1, A_2 \in H$, deci $A_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}$, $4x_1^2 - 3y_1^2 = 1$, $x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$, și $A_2 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix}$, $4x_2^2 - 3y_2^2 = 1$, $x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$. Rezultă:

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 3y_1y_2 & 6x_1y_2 + 6x_2y_1 \\ 2x_2y_1 + 2x_1y_2 & 3y_1y_2 + 4x_1x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) & 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1) \\ (2x_1y_2 + 2x_2y_1) & 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Calculând $4x^2 - 3y^2 = 4\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right)^2 - 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 =$

$$= 4\left(4x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2y_1y_2 + \frac{9}{4}y_1^2y_2^2\right) - 3\left(4x_1^2y_2^2 + 8x_1x_2y_1y_2 + 4x_2^2y_1^2\right) =$$

$$= 16x_1^2x_2^2 + 9y_1^2y_2^2 - 12x_1^2y_2^2 - 12x_2^2y_1^2 = 4x_1^2\left(4x_2^2 - 3y_2^2\right) - 3y_1^2\left(4x_2^2 - 3y_2^2\right) =$$

$$= \left(4x_1^2 - 3y_1^2\right)\left(4x_2^2 - 3y_2^2\right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

rezultă că H este parte stabilă pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

1.3. Tabla unei legi de compoziție (tabla lui Cayley)

Fie M o mulțime finită $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Legea de compoziție $\varphi : M \times M \to M$, poate fi dată prin **tabla operației** φ, care constă dintr-un tabel cu n linii și n coloane, corespunzătoare celor n elemente ale lui M. În tabla legii de compoziție φ conține la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j elementul $\varphi(a_i, a_j)$:

φ	a_1 a_2 ... a_j ... a_n
a_1	$\vdots$
a_2	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
a_i	...... $\varphi(a_i, a_j)$
$\vdots$	
a_n	

EXEMPLE

1. Fie $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$, adică mulțimea rădăcinilor de ordinul trei a unității. Avem $H \subset \mathbb{C}$. Întocmind tabla înmulțirii, legea de compoziție indusă pe H de înmulțirea numerelor complexe obținem:

$\cdot$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε	1	ε^2

Rezultă că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire.

2. Fie $H = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$. Operația indusă de înmulțirea numerelor complexe pe H

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

ne arată că submulțimea H a lui $\mathbb{C}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = [3, +\infty)$ și $\varphi : M \times M \to M$, $(xy) \to \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Să se arate că „$*$" este o lege de compoziție internă.

2. Fie legea de compoziție $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \overset{\text{def.}}{=} \min(x, y)$ și $H = \{-5, -1, 0, 1\}$. Să se întocmească tabla operației induse pe H de legea „$*$" și să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$".

Temă

1. Fie mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$ și operația de înmulțire: $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \to \varphi(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Dacă $H = \mathbb{Z}[i] = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu operația de înmulțire.

2. Fie $M = (1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y$,

   unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} xy + x + y + 2$. Să se demonstreze că $H = M$ este parte stabilă pentru mulțimea $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$".

3. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația $\varphi : M \times M \to M$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x - y}{1 - xy}$.

   Să se demonstreze că aplicația „$*$" este o lege de compoziție internă.

4. Fie aplicația: $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) = x * y \overset{\text{def.}}{=} \max(x, y)$. Să se arate că $H = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea „$*$".

5. Fie $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și operația: $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(A, B) \to AB$. Considerăm submulțimea

   $H = \left\{A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$, să se arate că H este parte stabilă pentru

   $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

6 . În mulțimea numerelor naturale nenule considerăm legea de compoziție: $\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $(a, b) \to \varphi(a, b)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \overset{\text{def.}}{=}$ c.m.m.d.c.(a, b). Dacă vom considera submulțimea lui $\mathbb{N}^*$, $H = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } 15\}$, să se arate că H este parte stabilă a lui $\mathbb{N}^*$ în raport cu legea „$*$".

7 . Fie legea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6$. Să se demonstreze că $H = (1, 3)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

8 . Fie $\varphi : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$, $(A, B) \to AB$. Considerând matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $H = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset M_3(\mathbb{R})$ să se arate că H este parte stabilă a mulțimii matricelor $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și să se întocmească tabela operației pentru H.

9 . Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că submulțimea $H = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

10. Fie $H = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ divide } 12\}$. Arătați că H este o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu legile de compoziție: $a \perp b \overset{\text{def.}}{=}$ c.m.m.d.c.(a, b), $a \top b \overset{\text{def.}}{=}$ c.m.m.m.c.(a, b), $a, b \in \mathbb{N}$. Alcătuiți tablele legilor induse.

1.4. Proprietăți ale operațiilor algebrice

În definiția unei operații algebrice (a unei legi de compoziție):

$$\varphi : M \times M \to M,\ (x, y) \to \varphi(x, y)$$

a fost impusă o singură restricție și anume: prin legea φ, oricăror două elemente $x, y \in M$ cu alte cuvinte oricărei perechi ordonate $(x, y) \in M \times M$ îi corespunde un singur element $\varphi(x, y)$ din M și numai unul.

Natura elementelor mulțimii M și modul cum acționează legea de compoziție nu au importanță în definiția legii de compoziție.

Studiul legilor de compoziție, care se bazează numai pe definiție, nu conduce la obținerea unor rezultate deosebite. Din analiza legilor de compoziție se deduc proprietăți comune care se regăsesc în exemplele concrete studiate.

În cele ce urmează, vom studia în cazul general proprietăți ale unei legi de compoziție, cum ar fi, de exemplu, cele care au fost întâlnite la operațiile definite pe mulțimea numerelor complexe, adunarea sau înmulțirea:

a) asociativitate;
b) element neutru;
c) elemente simetrizabile;
d) comutativitate.

1.4.1. Asociativitatea

Definiție

O lege de compoziție

$$*: M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y,$$

se numește **asociativă** dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall\ x, y, z \in M.$$

Vom preciza că mulțimea M este o mulțime nevidă, care este dotată cu legea de compoziție „$*$“.

Utilizarea parantezelor în definiția asociativității pentru prima parte a egalității în expresia:

$$(x * y) * z$$

impune procedura de calcul: se determină compusul lui x cu y și apoi compusul elementului $(x * y)$ cu z în această ordine. Pentru expresia:

$$x * (y * z)$$

procedura de calcul este: se determină compusul lui y cu z și apoi compusul elementului x cu elementul $(y * z)$, în această ordine.

Vom preciza că în cazul în care legea de compoziție este dată în notație aditivă:

$$M \times M \to M,\ (x, y) \to x + y,$$

proprietatea de asociativitate se scrie astfel:

$$(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall\ x, y, z \in M.$$

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă:

$$M \times M \to M,\ (x, y) \to xy,$$

proprietatea de asociativitate se scrie astfel:

$$(xy)z = x(yz),\ \forall\ x, y, z \in M.$$

EXEMPLE

1. Fie M una dintre mulțimile de numere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Operația de adunare:

$+ : M \times M \to M,\ (x, y) \to x + y,$

este asociativă: $(x + y) + z = x + (y + z),\ \forall\ x, y, z \in M$.

De asemenea, operația de înmulțire:

$\cdot : M \times M \to M,\ (x, y) \to x \cdot y = xy$, este asociativă:

$(xy)z = x(yz),\ \forall\ x, y, z \in M$.

2. Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$. Se definește aplicația: $* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y$, unde $x * y \overset{\text{def}}{=} xy - 2x - 2y + 6$.

Să dovedim că este o lege de compoziție internă asociativă.

Putem scrie $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$. Din condiția $x, y \in M$, rezultă $x > 2$ și $y > 2$, deci $x - 2 > 0$, $y - 2 > 0$, deci $(x - 2)(y - 2) > 0$, de unde deducem $(x - 2)(y - 2) + 2 > 2$, deci $x * y \in M$.

Pentru a stabili dacă „$*$“ este asociativă $(x * y) * z = x * (y * z),\ \forall\ x, y, z \in M$, vom calcula:

$$(x * y) * z = [(x - 2)(y - 2) + 2] * z = [(x - 2)(y - 2) + 2 - 2](z - 2) + 2 =$$
$$= (x - 2)(y - 2)(z - 2) + 2$$

și $x * (y * z) = x * [(y-2)(z-2) + 2] =$

$$= (x-2)[(y-2)(z-2) + 2 - 2] + 2 = (x-2)(y-2)(z-2) + 2.$$

Astfel am dovedit că legea de compoziție „$*$“ este asociativă.

3. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația : $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x+y}{1+xy}$.

Am demonstrat că este o lege de compoziție internă. Să verificăm că această lege este asociativă.

Avem: $(x * y) * z = \dfrac{x+y}{1+xy} * z = \dfrac{\dfrac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \dfrac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}$.

Analog: $x * (y * z) = x * \dfrac{y+z}{1+yz} = \dfrac{x + \dfrac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \dfrac{y+z}{1+yz}} = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}$,

ceea ce probează proprietatea de asociativitate.

4. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și aplicația $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{xy}$.

Aplicația este o lege de compoziție internă; din condiția $x, y \in M$ rezultă $x * y = \sqrt{xy} \in M$. Studiind proprietatea de asociativitate, deducem:

$$(x * y) * z = \sqrt{xy} * z = \sqrt{\sqrt{xy} \cdot z} = \sqrt{\sqrt{xyz^2}} = \sqrt[4]{xyz^2}, \text{ respectiv}$$

$$x * (y * z) = x * \sqrt{yz} = \sqrt{x\sqrt{yz}} = \sqrt{\sqrt{x^2yz}} = \sqrt[4]{x^2yz},$$

ceea ce dovedește că legea de compoziție „$*$“ nu este asociativă (legea studiată reprezintă media geometrică și rezultă că nu este asociativă).

5. Un exemplu de lege de compoziție asociativă este produsul matricelor.
Fie $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $(A, B) \to AB$. Se știe că este verificată proprietatea de asociativitate: $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$, $\forall\, A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = (3, +\infty)$ și aplicația $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde $x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12$.
   a) Arătați că aplicația „$*$“ este o lege de compoziție internă.
   b) Verificați că este satisfăcută proprietatea de asociativitate.
2. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că este verificată proprietatea de asociativitate pentru operația de adunare și operația de înmulțire a matricelor: $(A + B) + C = A + (B + C)$ și $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$.
3. Fie mulțimea $M = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ și aplicația $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x+y}{2}$
   (este definiția mediei aritmetice a două numere: $m_{\text{arit.}} = \dfrac{x+y}{2}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$).
   Arătați că nu este verificată proprietatea de asociativitate.

Temă

1. Fie $M = 2\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi pare. Să se demonstreze că operațiile de adunare și de înmulțire:
$+ : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z},\ (x, y) \to x + y$ și $\cdot : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z},\ (x, y) \to xy$
sunt legi de compoziție asociative.

2. Fie $M = 2\mathbb{Z} + 1$ mulțimea numerelor întregi impare.
Să se demonstreze că operația de înmulțire $\cdot : M \times M \to M,\ (x, y) \to xy$, este asociativă, dar operația de adunare nu este o lege de compoziție internă, deci $+ : M \times M \to M$, $(x, y) \to x + y$, deci nu este asociativă.

3. Fie $M = (1, 2) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - x - y + 2$. Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$" și apoi să se verifice că legea indusă pe M este asociativă.

4. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația $* : M \times M \to M,\ (x, y\,) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x+y}{1+xy}$.
Să se verifice dacă „$*$" este o lege de compoziție internă și apoi să se verifice asociativitatea.

5. Fie $M = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ și aplicația $* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y$, unde
$x * y \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ este o lege de compoziție internă. Să se arate că această lege induce pe mulțimea $(1, +\infty)$ o lege de compoziție asociativă.

6. Fie $H = \{A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, \det A = 1\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că aplicația $\cdot : H \times H \to H$, $(A, B) \to A \cdot B \overset{\text{not}}{=} AB$ este o lege de compoziție internă (H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor) asociativă.

7. Fie $M = \mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi și legea
$\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x \circ y \overset{\text{def.}}{=} x + y - xy$ numită **compunerea circulară**.
Să se arate că legea de compoziție „$\circ$" este asociativă.

8. Fie $M = [-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y + xy$.
Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$" și este asociativă.

9. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} mx + y,\ m \in \mathbb{R}$.
Să se determine parametrul m astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

10. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea: $M \times M \to M,\ (x, y) \to x \circ y = ax + by - 1$.
Să se determine a, b astfel încât legea „$\circ$" să fie asociativă.

1.4.2. Elementul neutru

Dacă M este una dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, atunci numerele 0 și 1 au proprietățile cunoscute:
$$0 + x = x + 0 = x,\ \forall\, x \in M,$$
respectiv
$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,\ \forall\, x \in M.$$

De asemenea, am văzut că pentru $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elementele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pentru operațiile de adunare și înmulțire a matricelor satisfac proprietățile:
$$O_2 + A = A + O_2 = A,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$
$$I_2 \cdot A = A \cdot I_2 = A,\ \forall\, A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Această proprietate va fi studiată în cazul general.

Definiție

Un element $e \in M$ se numește **element neutru** pentru o lege de compoziție
$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y,$$
dacă $e * x = x * e = x$, $\forall\, x \in M$.

Este foarte important rezultatul dat în următoarea teoremă referitor la unicitatea elementului neutru.

Teoremă

Dacă o lege de compoziție are element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație

Presupunem că legea de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$ admite două elemente neutre e și e'. Avem: $e * e' = e' * e = e'$ pentru că e este element neutru. De asemenea, $e' * e = e * e' = e$, pentru că și e' este element neutru. Din aceste egalități rezultă $e' = e$, ceea ce demonstrează că, în cazul în care există element neutru, el este unic determinat.

Observații:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, elementul neutru se notează de regulă cu 0 și se numește **elementul zero**. Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, elementul neutru se notează cu 1 și se numește **element unitate**. Avem:
$$0 + x = x + 0 = x,\ \forall\, x \in M,$$
respectiv $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall\, x \in M$.

EXEMPLE

1. Fie $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$ și operația indusă de înmulțirea numerelor complexe. Din tabela înmulțirii pe H, rezultă:

$\cdot$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Deducem că elementul neutru este $e = 1$.

2. Fie legea de compoziție: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x \circ y \overset{\text{def.}}{=} x + y - xy$. Această lege de compoziție admite element neutru. Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru: $e \circ x = x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Putem scrie $x = e \circ x = e + x - ex$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, de unde rezultă $e - ex = 0$ sau $e(1 - x) = 0$. Această relație este satisfăcută $\forall x \in \mathbb{Z}$ dacă $e = 0$. În acest caz avem $x \circ 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x$, deci elementul neutru este $e = 0$.

Exerciții rezolvate

1. Fie mulțimea $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - x - y + 2$. Să se studieze existența elementului neutru.

Soluție

Notând cu e elementul neutru, avem: $e * x = x * e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Din $x = e * x$, deducem $x = ex - e - x + 2$ sau $2x - 2 - e(x - 1) = 0$, $(2 - e)(x - 1) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $2 - e = 0$, $e = 2$. Avem $x * e = x * 2 = x \cdot 2 - x - 2 + 2 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $H = \mathbb{C} \setminus \{i\} \subset \mathbb{C}$ și legea: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \to z_1 \top z_2 \overset{\text{def.}}{=} z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) + i - 1$. Să se arate că H este o parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție indusă și că această lege este asociativă și admite element neutru.

Soluție

Legea de compoziție „$\top$" poate fi scrisă sub forma: $z_1 \top z_2 = (z_1 - i)(z_2 - i) + i$.

Din condiția $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ rezultă $z_1 \neq i, z_2 \neq i$, de unde deducem $z_1 - i \neq 0$ și $z_2 - i \neq 0$, deci $(z_1 - i)(z_2 - i) \neq 0$ și avem $z_1 \top z_2 = (z_1 - i)(z_2 - i) + i \neq i$, $z_1 \top z_2 \in H$.

Pentru a studia asociativitatea: $(z_1 \top z_2) \top z_3 = z_1 \top (z_2 \top z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in H$, avem:

$$(z_1 \top z_2) \top z_3 = [(z_1 - i)(z_2 - i) + i] \top z_2 = [(z_1 - i)(z_2 - i) + i - i](z_3 - i) + i =$$
$$= (z_1 - i)(z_2 - i)(z_3 - i) + i.$$

Analog $z_1 \top (z_2 \top z_3) = z_1 \top [(z_2 - i)(z_3 - i) + i] =$
$$= (z_1 - i)[(z_2 - i)(z_3 - i) + i - i] + i = (z_1 - i)(z_2 - i)(z_3 - i) + 1,$$
deci rezultă că legea „$\top$" este asociativă.

Pentru elementul neutru pe care îl vom nota cu e avem: $e \top z = z \top e = z$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Din egalitatea $z = e \top z$, rezultă $z = (e - i)(z - i) + i$, și putem scrie: $z - i - (e - i)(z - i) = 0$, $(z - i)(1 - e + i) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; deducem $e = 1 + i$. De asemenea, avem: $z \top e = (z - i)(e - i) + i = (z - i)(1 + i - i) + i = z - i + i = z$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

3. Fie mulțimea $M = (\sqrt{3}, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție: $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - (x + y)\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}$. Să se arate că legea „$*$" admite element neutru.

Soluție

Dacă notăm cu e elementul neutru, $e * x = x * e = x$, $\forall x \in M$, din egalitatea $x = e * x$ rezultă: $x = ex - (e + x)\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}$, $x - \sqrt{3} = (e - \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$, $(x - \sqrt{3})(e - \sqrt{3} - 1) = 0$, $\forall x \in M$, de unde rezultă: $e = 1 + \sqrt{3}$. Efectuând calculele, rezultă

$$x * e = (x - \sqrt{3})(e - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = (x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}) + \sqrt{3} =$$
$$= x - \sqrt{3} + \sqrt{3} = x, \forall x \in M.$$

4. Fie $M = 2\mathbb{Z}$ și legea indusă pe M de adunarea și înmuțirea numerelor întregi. Să se arate că legea de compoziție indusă pe mulțimea $2\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea admite element neutru, dar nu admite element neutru în raport cu operația de înmulțire.

Soluție

Fie e_+ elementul neutru în raport cu operația de adunare: $e_+ + x = x + e_+ = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$. Avem $e_+ = 0 = 2 \cdot 0$, astfel încât $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$.

Pentru înmulțire: $e_\cdot \cdot x = x \cdot e_\cdot = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$, avem $e_\cdot \cdot x = x$, deci $(e_\cdot - 1)x = 0, \forall x \in 2\mathbb{Z}$, de unde rezultă $e_\cdot = 1$, dar $1 \notin 2\mathbb{Z}$.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = 2\mathbb{Z} + 1$ mulțimea numerelor întregi impare și operațiile:
$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to x + y$ și $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \to xy$.
Arătați că legea de compoziție indusă pe $2\mathbb{Z} + 1$ de adunarea numerelor întregi nu admite element neutru, dar legea de compoziție indusă pe $2\mathbb{Z} + 1$ de înmulțirea numerelor întregi, admite element neutru.

2. Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$ și aplicația $* : M \times M \to M, (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} (x-2)(y-2) + 2$.
Arătați că „$*$“ este o lege de compoziție internă care admite element neutru.

3. Fie $H = \{-1, 1, -i, i\} \subset \mathbb{C}$. Să se întocmească tabla înmulțirii pe H, indusă de înmulțirea numerelor complexe și să se determine elementul neutru.

Temă

1. Fie mulțimea $M = (-2, +\infty)$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M$,
$(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy + 2x + 2y + 2$. Arătați că legea „$*$“ admite element neutru.

2. Fie $M = (-1, 1)$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M$,
$(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{x + y}{1 + xy}$. Determinați elementul neutru al legii „$*$“.

3. Fie $M = [5, 7]$ și aplicația $* : M \times M \to M, (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 6x - 6y + 42$.
Arătați că „$*$“ este o lege de compoziție cu element neutru.

4. Fie mulțimea $M = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M$,
$(z_1, z_2) \to z_1 * z_2 \overset{\text{def.}}{=} z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$.
Să se arate că legea „$*$“ admite element neutru.

5. Fie $M = [-2, +\infty)$ și aplicația $* : M \times M \to M, (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} 3xy + 6(x + y) + 10$.
Arătați că „$*$“ este lege de compoziție internă și admite element neutru.

6. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$*$“ prin: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - x - y - 2$.
Cercetați existența elementului neutru.

7. Pe $\mathbb{Q}$ se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y - \frac{1}{2}xy$.

   Arătați că $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea de compoziție „$*$" și determinați elementul neutru.

8. Se definește pe $\mathbb{C}$ legea de compoziție „$*$" prin relația: $z_1 * z_2 = (1 - i)z_1z_2$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$. Să se găsească elementul neutru.

9. Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „$*$" astfel: $x * y = xy - 3(x + y) + 12$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine elementul neutru.

10. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziție $* : G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$. Determinați elementul neutru u ale legii „$*$".

1.4.3. Elementele simetrizabile

Fie M o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$.
Pentru această lege de compozție vom presupune că este asociativă și admite element neutru, notat e.

Definiție

Un element $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea de compoziție „$*$" (asociativă și cu element neutru)

$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y$$

dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

În cazul în care un element $x \in M$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$*$", atunci simetricul x' este unic.

Teoremă

Dacă x' este simetricul elementului x, pentru legea de compoziție

$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y,$$

atunci x' este unic.

Demonstrație:

Dacă x' și x'' ar fi elemente simetrice al elementului $x \in M$, atunci:

$x' * x = x * x' = e$, x' fiind simetric al elementului $x \in M$.

De asemenea, $x'' * x = x * x'' = e$, x'' fiind presupus element simetric al lui $x \in M$.

Putem scrie: $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$.

Observație:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, simetricul unui element $x \in M$ se notează cu $-x$ și se numește **opusul** lui x: $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, simetricul lui x în cazul în care există se notează cu x^{-1} și se numește **inversul** lui x; $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

EXEMPLE

1. Fie $M = \mathbb{Z}$ și operația de adunare $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x + y$.

Orice element x este simetrizabil și simetricul său este $-x$, deci:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0.$$

Pentru operația de înmulțire: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to xy$, singurele elemente simetrizabile, (care admit elemente inverse) sunt -1 și 1, deci $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.

2. Fie $M = (2, +\infty)$ și legea de compoziție:

$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6.$$

Determinăm elementele simetrizabile ale mulțimii M în raport cu legea „$*$“.

Într-adevăr „$*$“ este o lege de compoziție internă: $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2 > 2$, $\forall\, x, y \in (2, +\infty)$. Notând cu e elementul neutru avem: $e * x = x * e = x$, $\forall\, x \in M$. Avem: $e * x = x$, $(e - 2)(x - 2) + 2 = x$ sau $(e - 2)(x - 2) - (x - 2) = 0$, $(x - 2)(e - 3) = 0$, $\forall\, x \in (2, +\infty)$, de unde rezultă $e = 3 \in M$. Este verificată și condiția

$$x * e = x,\ x * e = x * 3 = (x - 2)(3 - 2) + 2 = x - 2 + 2 = x,\ \forall\, x \in M.$$

Notăm cu x' simetricul unui element $x \in M$. Avem: $x' * x = x * x' = 3$, $e = 3$, $\forall\, x \in M$.

Din egalitatea $x' * x = 3$, deducem: $(x' - 2)(x - 2) + 2 = 3$, $(x' - 2)(x - 2) = 1$, $x' - 2 = \dfrac{1}{x - 2}$, $x' = 2 + \dfrac{1}{x - 2} \in M$ sau $x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$, $\forall\, x \in (2, +\infty)$. Este verificată și egalitatea: $x * x' = 3$.

Într-adevăr: $x * x' = x * \left(2 + \dfrac{1}{x - 2}\right) = (x - 2)\left(2 + \dfrac{1}{x - 2} - 2\right) + 2 = (x - 2)\dfrac{1}{x - 2} + 2 = 3.$

Unele proprietăți remarcabile sunt prezentate în următoarea teoremă:

Teoremă

Dacă $x, y \in M$ sunt elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$ (asociativă și cu element neutru), atunci: $x * y$ și x' sunt inversabile și avem:

1. $(x * y)' = y' * x'$;

2. $(x')' = x$.

Demonstrație:

Vom dovedi că $y' * x'$ este simetricul lui $x * y$. Avem:

$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e$.

Analog $(x * y) * (y' * x') = x * (y * (y' * x')) = x * ((y * y') * x') = x * (e * x') = x * x' = e$.

Rezultă că elementul $x * y$ este simetrizabil și $(x * y)' = y' * x'$.

Pentru proprietatea $(x')' = x$, avem: $x' * x = x * x' = e$, deci x este simetricul lui x', deci $(x')' = x$.

Observații:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, proprietățile prezentate în teorema precedentă se transcriu astfel:

$$-(x + y) = (-y) + (-x),\ \text{respectiv}\ -(-x) = x.$$

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, avem:

$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, respectiv $(x^{-1})^{-1} = x$.

În cazul unei legi de compoziție notată aditiv se face următoarea convenție:

$$\boxed{x - y \overset{\text{def.}}{=} x + (-y).}$$

Exercițiu rezolvat:

Fie mulțimea $M = \{z = a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 5b^2 = 1\}$ dotată cu legea:

$\cdot : M \times M \to M, (z_1, z_2) \to z_1z_2$.

Să se demonstreze că orice element $z \in M$ este simetrizabil.

Soluție

Fie $z_1, z_2 \in M$, deci $z_1 = a_1 - b_1\sqrt{5}$, $z_2 = a_2 - b_2\sqrt{5}$; $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1^2 - 5b_1^2 = 1$, $a_2^2 - 5b_2^2 = 1$.

Rezultă $z_1z_2 = (a_1 - b_1\sqrt{5})(a_2 - b_2\sqrt{5}) = (a_1a_2 + 5b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}$, unde $a_1a_2 + 5b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1 \in \mathbb{Q}$ și $(a_1a_2 + 5b_1b_2)^2 - 5(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = a_1^2a_2^2 + 10a_1a_2b_1b_2 +$

$+ 25b_1^2b_2^2 - 5a_1^2b_2^2 - 10a_1b_1a_2b_2 - 5a_2^2b_1^2 = a_1^2a_2^2 + 25b_1^2b_2^2 - 5a_1^2b_2^2 - 5a_2^2b_1^2 =$

$= a_1^2(a_2^2 - 5b_2^2) - 5b_1^2(a_2^2 - 5b_2^2) = (a_1^2 - 5b_1^2)(a_2^2 - 5b_2^2) = 1 \cdot 1 = 1$,

deci este o lege de compoziție internă.

Se verifică cu ușurință, proprietatea de asociativitate:

$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in M$.

Cercetând existența elementului neutru avem: $e = e_1 - e_2\sqrt{5}$, astfel încât:

$ez = ze = z, \forall z \in M$.

Din egalitatea: $ez = z$, rezultă pentru $z = a - b\sqrt{5}$, $(e_1 - e_2\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$; $(e_1a + 5e_2b) - (e_1b + e_2a)\sqrt{5} = a - b\sqrt{5}$, deci:

$$\begin{cases} e_1a + 5e_2b = a \\ e_1b + e_2a = b \end{cases},$$

de unde rezultă $e_1 = 1$ și $e_2 = 0$, deci $e = 1 - 0 \cdot \sqrt{5} = 1$, unde $e_1, e_2 \in \mathbb{Q}$ și $e_1^2 - 5e_2^2 = 1$.

Pentru $z = a - b\sqrt{5} \in M$, $a, b \in \mathbb{Q}$, vrem să determinăm elementele simetrice ale lui x.

Notând $z^{-1} = x - y\sqrt{5}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, elementul simetric a lui z, avem $z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = 1$.

Din egalitatea: $z^{-1} \cdot z = 1$, rezultă $(x - y\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = 1$, $(xa + 5yb) - (xb + ya)\sqrt{5} = 1$ și se obține sistemul:

$$\begin{cases} xa + 5yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} \left|\begin{array}{l} \cdot a \\ \cdot(-5b) \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot a \end{array}\right.$$

Adunând ecuațiile sistemului obținem ecuația $x(a^2 - 5b^2) = a$, cu soluția $x = a$; rezultă și $y = -b$. Obținem $z^{-1} = a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 - 5b^2 = 1$, de unde rezultă că este verificată și egalitatea $zz^{-1} = 1$:

$$z \cdot z^{-1} = (a - b\sqrt{5})(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 1.$$

Efectuați în clasă:

Fie mulțimea $M = (-2, +\infty)$ și aplicația:

$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} 3xy + 6(x + y) + 10.$$

Demonstrați că:

a) legea „$*$“ este o lege de compoziție internă;
b) legea „$*$“ este asociativă;
c) legea „$*$“ admite element neutru;
d) elementele mulțimii M sunt simetrizabile.

Temă

1 . Fie $H = \{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$. Demonstrați că înmulțirea numerelor complexe induce pe H o lege de compoziție internă și să se determine inversele elementelor lui H.

2 . Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(1 + x + y - xy)$.

Să se arate că legea este asociativă și are element neutru. Care sunt elementele simetrizabile?

3 . Fie legea de compoziție: $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y - 2xy$.
Determinați mulțimea elementelor simetrizabile.

4 . Pe $\mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „$*$“ astfel: $x * y = xy - 3(x + y) + 12,\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.
Să se determine elementul neutru și elementele care nu sunt simetrizabile.

5 . Pe mulțimea $M = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ se definește legea de compoziție: $x * y = \frac{4xy + 3}{4(x + y + 1)}$.
Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.

6 . Pe mulțimea $M = \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „$*$“ astfel:

$$* : M * M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} 2xy - 3x - 3y + 6.$$

Determinați mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu „$*$“.

1.4.4. Comutativitatea

Proprietățile studiate până acum pentru o lege de compoziție definită pe o mulțime nevidă au fost făcute cu restricția pentru compusul a două elemente x și y, care este primul element și respectiv al doilea element.

O importanță deosebită au legile de compoziție pentru care compusul a două elemente oarecare este independent de ordinea în care se face compunerea acestora.

Definiție

O lege de compoziție

$$* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y$$

se numește **comutativă**, dacă

$$x * y = y * x,\ \forall\, x, y \in M.$$

EXEMPLE

1 . Dacă M este una dintre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ operațiile de adunare și înmulțire sunt comutative: $x + y = y + x,\ \forall\, x, y \in M,\ xy = yx,\ \forall\, x, y \in M$.

2 . Operația de înmulțire a numerelor complexe $\cdot\ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \to (z_1, z_2) \to z_2 z_2$ induce pe mulțimea $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} \subset \mathbb{C},\ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, parte stabilă a lui $\mathbb{C}$, o operație comutativă. Din tabla înmulțirii deducem că legea de compoziție indusă este comutativă, tabla fiind simetrică față de diagonala principală.

$\cdot$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

3 . Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6$. Legea de compoziție „$*$“ este comutativă: $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in M$. Avem $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y + 6 = y * x,\ \forall\, x, y \in M$.

Să observăm ca legea de compoziție „$*$“ este simetrică în x și y ceea ce pune în evidență faptul ca legea de compoziție este comutativă.

Efectuați în clasă

1 . Arătați că operația de adunare a numerelor întregi pare $+ : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z},\ (x, y) \to x + y$ este comutativă.

2 . Fie mulțimea $M = (3, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12$. Arătați că legea „$*$“ este comutativă.

3 . Fie $M = (3, 5)$ dotată cu aplicația $* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 4(x + y) + 20$. Arătați că „$*$“ este o lege de compoziție internă comutativă.

4 . Fie $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, verificați că $AB \neq BA$.

5 . Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \to x * y = 2x + 3y$. Arătați că legea „$*$“ nu este comutativă.

Temă

1 . Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se definește legea de compoziție:
$\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x \circ y \overset{\text{def.}}{=} x + y - xy$
numită compunerea circulară. Arătați ca legea „$\circ$“ este asociativă și comutativă.

2 . Fie $M = (-\infty, 1)$ dotată cu aplicația $* : M \times M \to M,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{xy - 2}{x + y - 3}$.
Demonstrați că este o lege de compoziție comutativă.

3 . Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Să se demonstreze că operația de înmulțire indusă pe mulțimea M este comutativă.

4 . Fie $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}^* \right\}$ și legea de compoziție $\cdot : M \times M \to M$, $(A_x, A_y) \to A_x A_y$. Să se demonstreze că legea de compoziție indusă de înmulțirea matricelor este o lege comutativă.

5 . Fie mulțimea $M = (0, +\infty) - \{1\}$ și aplicația $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x^{\ln \sqrt[3]{y}}$. Să se demonstreze că este o lege de compoziție internă, comutativă.

6 . Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy + ax + by$. Să se determine a și b astfel încât legea să fie asociativă și comutativă.

7 . Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy + 2ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „$*$“ să fie comutativă și asociativă.

8 . Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție „$*$“: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=}$ $= (1 - a)x + ay - a$. Să se determine a astfel încât legea „$*$“ să fie comutativă.

9 . Fie legea $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} 2xy + ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „$*$“ să fie comutativă și asociativă.

10. Pe mulțimea $M = (1, +\infty)$ se consideră operația $x * y = 1 + (x - 1)^{\lg (y-1)}$. Să se arate că:
a) legea „$*$“ este o lege de compoziție pe M; **b)** legea „$*$“ este asociativă;
c) legea „$*$“ este comutativă.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

1. Fie mulțimea $M = \mathbb{Z}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y \overset{def}{=} x + y - 2$.
Să se demonstreze că legea „$*$“ :
a) este asociativă; **(1p)**
b) admite element neutru; **(1p)**
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; **(1p)**
d) legea „$*$“ este comutativă. **(1p)**

2. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y = x^{5\ln y}$.
Să se demonstreze că legea „$*$“ :
a) este asociativă; **(2p)**
b) admite element neutru; **(1p)**
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; **(1p)**
d) legea este comutativă. **(1p)**

B

1. Fie mulțimea $M = \mathbb{Z}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y \overset{def}{=} x + y - 3$.
Să se demonstreze că legea „$*$“ :
a) este asociativă; **(1p)**
b) admite element neutru; **(1p)**
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; **(1p)**
d) legea este comutativă. **(1p)**

2. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $* : M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y = x^{7\ln y}$.
Să se demonstreze că legea „$*$“ :
a) este asociativă; **(2p)**
b) admite element neutru; **(1p)**
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; **(1p)**
d) legea este comutativă. **(1p)**

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.

2. Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbb{Z}_n$

2.1. Definiții și exemple

Definiție

O mulțime nevidă M este **monoid** în raport cu o lege de compoziție „$*$“ definită pe M, $*: M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

M$_1$. $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in M$;

M$_2$. $\exists\, e \in M$ astfel încât $e * x = x \ * e = x$, $\forall\, x \in M$.

Monoidul va fi notat $(M, *)$. Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma:

M$_4$. $x * y = y * x = e$, $\forall\, x, y \in M$,

spunem că monoidul este comutativ.

Una dintre structurile importante pe care le vom studia este structura de grup. Fie o mulțime nevidă pe care o vom nota cu G, dotată cu o lege de compoziție.

Definiție

Un cuplu $(G, *)$ format dintr-o mulțime nevidă G și o lege de compoziție pe G,

$*: G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y$

se numește **grup** dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

G$_1$. $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in G$;

G$_2$. $\exists\, e \in G$ astfel încât $e * x = x \ * e = x$, $\forall\, x \in G$;

G$_3$. $\forall\, x \in G$, $\exists\, x' \in G$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

Ansamblul de condiții G_1, G_2, G_3 poartă numele de **axiomele grupului**, unde G_2 asigură existența **elementului neutru al grupului G**. Elementul x' a cărui existență este asigurată de axioma G_3 se numește **simetricul** lui x.

Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma

G$_4$. $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in G$,

atunci $(G, *)$ se numește **grup abelian** sau **grup comutativ**.

2.1.1. Grupuri numerice

EXEMPLE

1. Fie mulțimea $\mathbb{Z}$ dotată cu legea de compoziție

$$*: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y - 1.$$

Perechea $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

Legea „$*$“ este o lege de compoziție internă: $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$, atunci $x * y = x + y - 1 \in \mathbb{Z}$ și este verificat ansamblul de axiome:

G$_1$. $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{Z}$.

Avem $(x * y) * z = (x + y - 1) * z = (x + y - 1) + z - 1 = x + y + z - 2$, respectiv $x * (y * z) = x * (y + z - 1) = x + (y + z - 1) - 1 = x + y + z - 2$.

G_2. $\exists\, e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x$, $\forall\, x \in G$.

Din condiția $e * x = x$, rezultă $e + x - 1 = x$, deci $e = 1 \in \mathbb{Z}$.

Este verificată și condiția $x * e = x$, $x * 1 = x + 1 - 1 = x$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$.

G_3. $\forall\, x \in \mathbb{Z}$, $\exists\, x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Din condiția $x' * x = 1$, rezultă $x' + x - 1 = 1$, deci $x' = 2 - x$, $x' \in \mathbb{Z}$.

Este verificată și condiția $x * x' = 1$; $x * x' = x + (2 - x) - 1 = 1$.

Rezultă $(\mathbb{Z}, *)$ este grup. În plus, este verificată și axioma:

G_4. $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$. Avem: $x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$, deci $(G, *)$ este grup abelian.

2. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Arătăm că aplicația $* : G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} x^{\ln y}$ este o lege de compoziție pe G și $(G, *)$ este grup comutativ.

Legea „$*$" este o lege de compoziție internă $x, y \in G \Rightarrow \ln y \in \mathbb{R}^*$, deci $x^{\ln y} \in G$ și ansamblul de axiome din definiția grupului G_1, G_2, G_3 se verifică.

G_1. $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z \in G$. Avem $(x * y) * z = x^{\ln y} * z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$, de unde rezultă $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall\, x, y, z$.

G_3. Pentru a nu se crea confuzia elementului neutru cu baza logaritmului natural, vom nota elementul neutru cu e_* și avem: $\exists\, e_* \in G$ astfel încât $e_* * x = x * e_* = x$, $\forall\, x \in G$. Din egalitatea $e_* * x = x$, rezultă: $e_*^{\ln x} = x$ și deducem $\ln e_*^{\ln x} = \ln x$, $\ln x \cdot \ln e_* = \ln x$, deci

$(\ln e_* - 1)\ln x = 0$, unde $\ln x \neq 0$ și rezultă $\ln e_* = 1$, deci $\ln e_* = \ln e$, $e_* = e$, unde $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Este verificată și egalitatea $x * e_* = x$. Avem: $x * e_* = x * e = x^{\ln e} = x^1 = x$, $\forall\, x \in G$. Rezultă că $(G, *)$ este grup.

În plus, este verificată și axioma:

G_4. $x * y = y * x$, $\forall\, x, y \in G$. Într-adevăr, $x * y = x^{\ln y} = e^{\ln x^{\ln y}} = e^{\ln y \cdot \ln x} = e^{\ln y^{\ln x}} = y^{\ln x} = y * x$, de unde rezultă că $(G, *)$ este grup abelian.

2.1.2. Grupuri de funcții

EXEMPLU

Grupul lui Klein. Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $K = \{1_E, u, v, w\}$, unde 1_E, u, v, w sunt funcțiile:

$1_E : E \to E$, $1_E(x) = (x_1, x_2)$,
$u : E \to E$, $u(x) = (x_1, -x_2)$,
$v : E \to E$, $v(x) = (-x_1, x_2)$,
$w : E \to E$, $w(x) = (-x_1, -x_2)$,

oricare ar fi $x \in (x_1, x_2) \in E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Semnificațiile acestor funcții, dacă se consideră un sistem de axe de coordonate (x_1Ox_2) sunt: $1_E(x)$ este funcția identică; $u(x)$ este simetria față de axa Ox_2, $v(x)$ este simetria față de axa Ox_1, iar $w(x)$ este simetria față de origine (fig. 1).

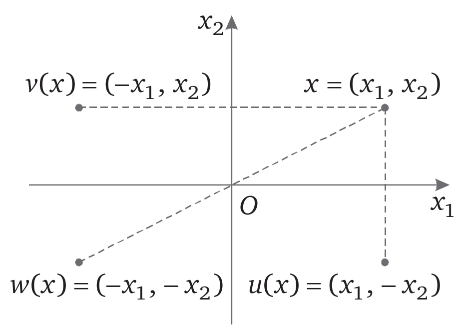

Fig. 1

Pentru orice $x \in E$, $x = (x_1, x_2)$, dacă compunem două funcții din $K = \{1_E, u, v, w\}$, se obține tot o funcție din K.

De exemplu:

$$(1_E \circ u)(x) = 1_E(u(x)) = 1_E(x_1, -x_2)) = (x_1, -x_2) = u(x),$$
$$(1_E \circ v)(x) = v(x),\ (1_E \circ w)(w) = w(x).$$
$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u((-x_1, x_2)) = (-x_1, -x_2) = w(x);$$
$$(v \circ w)(x) = v(w(x)) = v((-x_1, -x_2)) = (x_1, -x_2) = u(x);$$
$$(w \circ u)(x) = w(u(x)) = w((x_1, -x_2)) = (-x_1, x_2) = v(x);$$
$$(w \circ w)(x) = w(w(x)) = w((-x_1, -x_2)) = (x_1, x_2) = 1_E(x).$$

Dacă alcătuim tabla operației indusă pe K de compunerea funcțiilor, obținem:

$\circ$	$\mathbf{1}_E$	u	v	w
$\mathbf{1}_E$	$\mathbf{1}_E$	u	v	w
u	u	$\mathbf{1}_E$	w	v
v	v	w	$\mathbf{1}_E$	u
w	w	v	u	$\mathbf{1}_E$

Observație:

În cazul general al compunerii funcțiilor sunt verificate axiomele:

M_1. Asociativitatea: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}$.

M_2. Element neutru: $\exists\ 1_E \in \mathcal{F}$ astfel încât $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Putem spune că $(\mathcal{F}, \circ)$ este o structură de **monoid**.

Pentru mulțimea funcțiilor $K = \{1_E, u, v, w\}$ sunt satisfăcute axiomele:

$\mathbf{G_1}$. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, $\forall f, g, h \in K$.

$\mathbf{G_2}$. $\exists\ 1_E \in K$ astfel încât $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$, $\forall f \in K$.

$\mathbf{G_3}$. $\exists f^{-1} \in K$ astfel încât $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_E$, $\forall f \in K$.

Avem: $1_E^{-1} = 1_E$, $u^{-1} = u$, $v^{-1} = v$, $w^{-1} = w$.

În plus:

$\mathbf{G_4}$. $f \circ g = g \circ f$, $\forall f, g \in K$.

Această proprietate rezultă din observația că tabla operației lui K este simetrică în raport cu diagonala principală.

Funcțiile $1_E, u, v, w$ sunt bijective. Avem: $1_E \circ 1_E = 1_E$, $u \circ u = 1_E$, $v \circ v = 1_E$, $w \circ w = 1_E$.

Așadar, $(K, \circ)$ este grup, numit **grupul lui Klein**. Am constatat că grupul lui Klein este comutativ.

Efectuați în clasă

Fie mulțimea $G = (2, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \to G,\ (x, y) \to x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

a) Arătați că „$*$“ este o lege de compoziție internă.

b) Arătați că $(G, \circ)$ este grup abelian.

c) Calculați $x * x * x$ și apoi demonstrați că

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2.$$

2.2. Reguli de calcul într-un grup

Proprietatea G_3 a unui grup ne arată că orice element al unui grup este simetrizabil în raport cu operația acestuia. Rezultă că un grup este un monoid în care este verificată și axioma G_3.

În continuare, vom preciza câteva proprietăți importante ale grupurilor.

2.2.1. Simplificarea la stânga și la dreapta într-un grup

Teoremă

Într-un grup $(G, *)$ sunt adevărate regulile de simplificare la stânga și la dreapta:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c,$$

respectiv

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

Demonstrație

Fie $a, b, c \in G$ astfel încât $a * b = a * c$ și a' simetricul elementului a, deci $a' * a = a * a' = e$. Avem: $b = e * b = (a' * a) * b = a' * (a * b) = a' * (a * c) = (a' * a) * c = e * c = c$.

În mod analog demonstrăm și pentru simplificarea la dreapta. Presupunem $b * a = c * a$. Avem: $b = b * e = b * (a * a') = (b * a) * a' = (c * a) * a' = c * (a * a') = c * e = c$.

2.2.2. Ecuații într-un grup

Teoremă

Fie $(G, *)$ un grup. Oricare ar fi $a, b \in G$ ecuațiile

$$a * x = b \text{ și } y * a = b$$

au soluții unice în G, anume:

$$x = a' * b, y = b * a',$$

unde a' este simetricul lui a.

Demonstrație

Să arătăm că $x = a' * b$ este soluție a ecuației $a * x = b$, unde a' este simetricul lui a, $a' * a = a * a' = e$. Avem: $a * x = a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$.

Unicitatea. Dacă x_1 și x_2 sunt soluții din G ale ecuației $a * x = b$, atunci $a * x_1 = b = a * x_2$, deci $a * x_1 = a * x_2$ și conform regulii de simplificare la stânga obținem $x_1 = x_2$. Rezultă că ecuația $a * x = b$ admite soluție unică în grupul $(G, *)$.

Procedând analog și pentru ecuația $y * a = b$, deducem: Dacă y_1 și y_2 sunt soluții din G ale ecuației $y * a = b$, avem: $y_1 * a = b = y_2 * a$, de unde rezultă $y_1 * a = y_2 * a$ și, folosind regula de simplificare la dreapta, obținem $y_1 = y_2$. Așadar, ecuația $y * a = b$ are cel mult o soluție în G. Această soluție este $y = b * a'$.

Într-adevăr, $y * a = (b * a') * a = b * (a' * a) = b * e = b$.

2.3. Grupuri de permutări

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerând mulțimea $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și aplicațiile bijective $f : E \to E$, vom nota:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

și cu S_n mulțimea acestor *funcții bijective* ale cărei elemente se numesc *permutări de gradul n*.

Pentru oricare două elemente $\sigma, \tau \in S_1$ care sunt funcții, se definește operația de compunere definită a funcțiilor $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pentru $n = 3$, $E = \{1, 2, 3\}$, elementele mulțimii S_3, în număr de $3! = 6$, sunt:

$$1_E = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și avem mulțimea $S_3 = \{e, \sigma, \pi, \alpha, \beta, \gamma\}$.

Elementele acestei mulțimi fiind funcții bijective, prin compunerea a două permutări se obține o funcție bijectivă.

EXEMPLU

Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculăm $(\sigma \circ \gamma)(k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Avem: $(\sigma \circ \gamma)(1) = \sigma(\gamma(1)) = \sigma(2) = 3 = \beta(1)$.

$(\sigma \circ \gamma)(2) = \sigma(\gamma(2)) = \sigma(1) = 2 = \beta(2)$.

$(\sigma \circ \gamma)(3) = \sigma(\gamma(3)) = \sigma(3) = 1 = \beta(3)$.

și am obținut: $\sigma \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \beta$.

Întocmim tabela operației induse pe S_3 de către compunerea funcțiilor, numită *compunerea permutărilor* de trei obiecte.

$\circ$	e	σ	π	α	β	γ
e	e	σ	π	α	β	γ
σ	σ	π	e	γ	α	β
π	π	e	σ	β	γ	α
α	α	β	γ	e	σ	π
β	β	γ	α	π	e	σ
γ	γ	α	β	σ	π	e

Din analiza tablei compunerii permutărilor de trei obiecte, rezultă că „$\circ$" este o lege de compoziție internă. Precizăm că mulțimea funcțiilor în raport cu operația de compunere este *asociativă*. Pentru S_3, avem: $1_E = e \in S_3$, unde e este elementul neutru și din tabela compunerii rezultă că orice element din S_3 este simetrizabil, anume:

$$e^{-1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};\ \sigma^{-1} = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \pi^{-1} = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\alpha^{-1} = \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ \beta^{-1} = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};\ \gamma^{-1} = \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Fiind verificate axiomele G_1, G_2, G_3 din definiția unui grup, rezultă că $(S_3, \circ)$ este grup, numit **grupul permutărilor de trei obiecte** sau **grupul simetric de grad 3**. Vom preciza că acest grup *nu este comutativ*. Din tabla operației lui S_3 deducem, de exemplu, că:

$\alpha \circ \pi = \gamma \neq \beta = \pi \circ \alpha$; $\pi \circ \beta = \gamma \neq \alpha = \beta \circ \pi$.

În general, dacă $n > 1$ și $E = \{1, 2, 3,..., n\}$, atunci mulțimea S_n a funcțiilor bijective de la E la E formează un grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor, notată „$\circ$"; $(S_n, \circ)$ se numește **grupul permutărilor de *n* obiecte** sau **grupul simetric de grad *n***.

2.4. Grupuri de resturi modulo *n* ($\mathbb{Z}_n$)

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}$, conform definiției împărțirii cu rest rezultă că există $q, r \in \mathbb{Z}$ unic determinați astfel încât:

$$a = nq + r,\ 0 \le r < n .$$

Din relația precedentă, deducem că numărul r, unic determinat, este restul împărțirii lui a la n și se mai notează:

$$r = a\ \mathrm{mod} n$$

numit și **redusul modulo *n* al lui *a***.

Resturile posibile ale împărțirii numerelor întregi prin $n \in \mathbb{N}^*$ sunt:

$$0, 1, 2, \dots r, \dots, n-1,$$

mulțime notată cu:

$$\Re_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Operațiile induse pe $\Re_n$ de către adunarea și înmulțirea modulo n sunt:

$\oplus : \Re_n \times \Re_n \to \Re_n$, $(a, b) \to a \oplus b \stackrel{\text{def.}}{=} (a+b)\,\mathrm{mod}\, n$;

$\otimes : \Re_n \times \Re_n \to \Re_n$, $(a, b) \to a \otimes b \stackrel{\text{def.}}{=} (ab)\,\mathrm{mod}\, n$.

Pentru $n = 3$, $\Re_3 = \{0, 1, 2\}$ tablele operațiilor induse pe $\Re_3$ de către adunarea și înmulțirea modulo 3 sunt cele alăturate:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\otimes$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Pentru $n = 4$, $\Re_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, tablele operațiilor induse pe $\Re_4$ de către adunarea și înmulțirea modulo 4 sunt cele alăturate:

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Analizând, pentru $n = 4$, $\Re_4 = \{0, 1, 2, 3,\}$ vom observa că $(\Re_4, \oplus)$este o structură de grup abelian, unde sunt verificate axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 și:

$e = 0$; $-0 = 0$; $-1 = 3$; $-2 = 2$; $-3 = 1$.

Precizăm că, în general, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\Re_n = \{0, 1, 2,..., n-1\}$, de unde rezultă că $(\Re_n, \oplus)$ este o structură de grup abelian, numit **grupul resturilor modulo *n***.

Pentru $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se definesc mulțimile:

$C_0, C_1, \dots, C_r, \dots, C_{n-1}$, unde:

$C_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a\mathrm{mod} n = 0\} = \{nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$;

$C_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = 1\} = \{nh+1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}+1$;

...

$C_r = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = r\} = \{nh+r \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}+r$;

...

$C_{n-1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = n-1\} = \{nh+n-1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}+n-1$

și se numesc *clase de resturi* modulo ***n***.

Clasa de resturi modulo *r* se notează cu C_r sau $\hat{r}$:

$\hat{r} = C_r = n\mathbb{Z}+r$, $r \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

În acest fel, se obține **mulțimea claselor de resturi modulo *n***, notată cu $\mathbb{Z}_n$:

$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$

Pe mulțimea $\mathbb{Z}_n$ a claselor de resturi modulo *n*, se definesc operațiile de adunare și de înmulțire:

$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a} + \hat{b} \overset{\text{def.}}{=} \widehat{a \oplus b}$, $\quad \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $(\hat{a}, \hat{b}) \to \hat{a}\hat{b} \overset{\text{def.}}{=} \widehat{a \otimes b}$.

Fie $n = 4$. Rezultă $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3}\}$ și tabla adunării este alături.

Analizând tabla adunării claselor de resturi modulo 4, deducem că sunt verificate axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 ale unui grup comutativ, unde:

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$e = \hat{0}$, $\hat{0} = \hat{0}$, $\widehat{-1} = \hat{3}$, $\widehat{-2} = \hat{2}$, $\widehat{-3} = \hat{1}$.

și tabla adunării este simetrică față de diagonala principală:

$\hat{x} + \hat{y} = \hat{y} + \hat{x}$, $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$.

În general, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$, avem că $(\mathbb{Z}_n,+)$, este o structură de grup abelian, numit **grupul claselor de resturi modulo *n*** pentru operația de adunare.

2.5. Grupuri de matrice

EXEMPLU

Fie mulțimea $M = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor:

$$\cdot : M \times M \to M,\ (A_\alpha, B_\beta) \to A_\alpha \cdot B_\beta.$$

Se verifică axiomele grupului G_1, G_2, G_3 și G_4, deci $(M, \cdot)$ este grup abelian.

Efectuați în clasă

1. Pentru $n = 2$, $E_2 = \{1, 2\}$ să se scrie permutările lui S_2 și să se întocmească tabla compunerii.
2. Pentru $n = 6$, $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$, să se întocmească tabla adunării și să se verifice că $(\mathbb{Z}_6, +)$ este o structură de grup abelian.

Observație: Stabiliți dacă $(\mathbb{Z}, \cdot)$ este o structură de grup. Justificați.

Temă

1. Fie mulțimea $G = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, unde $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale și legea de compoziție $* : G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y - \frac{1}{3}xy$.

   Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.

2. Fie mulțimea $G = (2, +\infty) \setminus \{3\}$ și aplicația $* : G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y \overset{\text{def.}}{=} (x-2)^{\frac{1}{2}\ln(y-2)} + 2$.

   Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.

3. Fie mulțimea numerelor întregi, $k \in \mathbb{Z}$ și aplicația $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y \overset{\text{def.}}{=} x + y + ky$.

   Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, *)$ să fie o structură de grup abelian.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y = ax + by$.
   Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să fie o structură de grup abelian.

5. Fie mulțimea $G = (-2, +\infty)$ și legea de compoziție $* : G \times G \to G$, $(x, y) \to x * y$, unde: $x * y = xy + 2(x + y) + 2$.
   Să se demonstreze că $(G, *)$ este o structură de grup abelian.

6. Fie $M = \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$ și funcțiile $f_i : M \to M$, $i = 1, 2, 3, 4$, unde:

   $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $f_3(x) = -\frac{1}{x}$ și $f_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}$.

   Considerând mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ și operația de compunere a funcțiilor, notată cu „$\circ$” să se demonstreze că $(G, \circ)$ este o structură de grup comutativ.

7. Fie mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$.

   Să se demonstreze că mulțimea M în raport cu operația de înmulțire a matricelor este o structură de grup.

8. Fie mulțimea $M = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor $\cdot : M \times M \to M$, $(A_\alpha, B_\beta) \to A_\alpha \cdot B_\beta$. Demonstrați că $(M, \cdot)$ este structură de grup.

9. Fie mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ \frac{7}{2}y & x \end{pmatrix} \middle| \; x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1 \right\}$.

   Să se demonstreze că $(M, \cdot)$ este o structură de grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

10. Fie mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ și funcțiile $f_i : M \to M,\ i = 1, 2, 3,$ unde:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}} \text{ și } f_3(x) = \frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}.$$

Notând $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ și operația de compunere a funcțiilor cu „$\circ$” să se demonstreze că $(G, \circ)$ este o strctură de grup.

11. Fie mulțimea $G = (-3, 3)$ și legea de compoziție $* : G \times G \to G,\ (x, y) \to x * y$, unde: $x * y = \frac{9(x+y)}{9+xy}$. Să se demonstreze că $(G, *)$ este o structură de grup abelian.

3. Morfisme și izomorfisme de grupuri

Definiție

Fie $(G, *)$ și $(\Gamma, \circ)$ două grupuri. O funcție

$$f : G \to \Gamma$$

se numește **morfism de grupuri** dacă:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y),\ \forall\, x, y \in G.$$

EXEMPLE

1. Fie grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și grupul multiplicativ al mulțimii numerelor reale strict pozitive $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$.

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^x$, este un morfism de grupuri.

Condiția $f(x + y) = f(x) \cdot f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ este satisfăcută:

$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

2. Considerând aceleași grupuri $(\mathbb{R}, +)$ și $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$, funcția $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$, cu $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, este un morfism de grupuri.

Condiția $f(x \cdot y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ este verificată:

$$f(x \cdot y) = \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

3. Fie grupul multiplicativ al numerelor reale, strict pozitive $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$ și grupul $(G, \cdot)$, unde $G = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \ x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$ și „$\cdot$“ este operația de înmulțire a matricelor.

Funcția: $f : \mathbb{R}_+^* \to G,\ f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ este un morfism de grupuri. Avem:

$$f(xy) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

În practică s-a constatat că numărul exemplelor de grupuri este considerabil și din acest motiv se impune o clasificare a acestora în funcție de proprietatea lor. Două grupuri $(G, *)$ și $(\Gamma, \circ)$ vor fi declarate ca fiind de *același tip* (*izotipice*) dacă cele două grupuri G și Γ *sunt la fel de bogate* în elemente și *operațiile celor două grupuri*, mai puțin o bijecție $f : G \to \Gamma$, *acționează la fel asupra elementelor celor două grupuri* G *și* Γ.

Definiție

Fie $(G, *)$ și $(\Gamma, \circ)$ două grupuri. O aplicație bijectivă $f : G \to \Gamma$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y),\ \forall\, x, y \in G.$$

Vom spune că grupul G este **izomorf** cu grupul Γ și scriem $G \simeq \Gamma$. În caz contrar spunem că grupul G **nu este izomorf** cu grupul Γ și scriem $G \not\simeq \Gamma$.

Dacă vom reprezenta geometric cele două mulțimi G și Γ și imaginile elementelor x, y și $x * y$ prin obținem imaginea din figura 2.

Din cele arătate și din figura alăturată rezultă **imaginea compusului** a două elemente $f(x * y)$ este compusul imaginilor $f(x) \circ f(y)$.

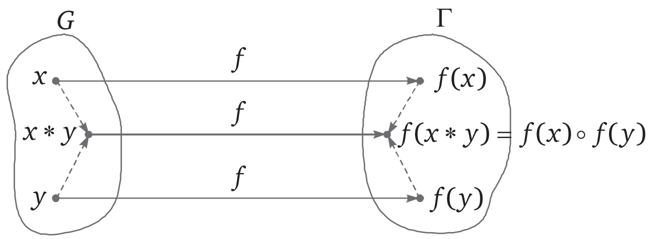

Fig. 2

EXEMPLE

Fie $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, unde $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive și grupul $(\Gamma, *)$, unde $\Gamma = (-1, 1)$, iar legea de compoziție este:

$$\Gamma \times \Gamma \to \Gamma,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să arătăm că aplicația: $f : (0, +\infty) \to (-1, 1)$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ la grupul $(\Gamma, *)$.

În rezolvare vom considera că au fost studiate cele două grupuri $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $(\Gamma, \circ)$ și vom analiza proprietatea de izomorfism. Pentru aceasta este necesar să demonstrăm că:

1. $f : \mathbb{R}_+^* \to \Gamma$, $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, este funcție bijectivă;

2. $f(xy) = f(x) \circ f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Funcția $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \Gamma$ este bijectivă:

a) Injectivitatea: $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $\dfrac{1 - x_1}{1 + x_1} = \dfrac{1 - x_2}{1 + x_2}$, $(1 - x_1)(1 + x_2) =$
$= (1 + x_1)(1 - x_2)$, $1 - x_1 + x_2 - x_1x_2 = 1 + x_1 - x_2 - x_1x_2$,
deci $-x_1 + x_2 = x_1 - x_2$ sau $2(x_1 - x_2) = 0$ și obținem $x_1 = x_2$, deci f este injectivă.

b) Surjectivitatea: $\forall\, y \in \Gamma$ există $x \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $f(x) = y$.

Din $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, deducem $y(1+x) = 1 - x \Rightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y}$ și avem

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\dfrac{1-y}{1+y}}{1+\dfrac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y-1+y}{1+y+1-y} = \frac{2y}{2} = y.$$

Rezultă că funcția f este bijectivă

2. Este verificată și identitatea $f(xy) = f(x) * f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Avem $f(xy) = \dfrac{1-xy}{1+xy}$, respectiv $f(x) * f(y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \dfrac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1-y}{1+y}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{1-y}{1+y}} =$

$$= \frac{(1-x)(1+y)+(1+x)(1-y)}{(1+x)(1+y)+(1-x)(1-y)} = \frac{1-x+y-xy+1+x-y-xy}{1+x+y+xy+1-x-y+xy} =$$

$$= \frac{2-2xy}{2+2xy} = \frac{2(1-xy)}{2(1+xy)} = \frac{1-xy}{1+xy}, \text{ deci } f(xy) = f(x) * f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Astfel am demonstrat că grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\Gamma, *)$.

Un rezultat important este dat de următoarea

Teoremă

Fie $(G, *)$ și $(\Gamma, \circ)$ două grupuri. Dacă $f : G \to \Gamma$ este un izomorfism, atunci și $f^{-1} : \Gamma \to G$ este izomorfism.

Demonstrație

Din ipoteză, funcția $f : G \to \Gamma$ este bijectivă, de unde rezultă că există inversa f^{-1} a funcției f, $f^{-1} : \Gamma \to G$ și f^{-1} este de asemenea bijectivă.

Fie $u, v \in \Gamma$. Cum f este aplicație bijectivă, există $x, y \in G$ unic determinați astfel încât $f(x) = u$ și $f(y) = v$. De asemenea, avem $f^{-1}(u) = x$ și $f^{-1}(v) = y$. Reprezentând geometric aplicația $f : G \to \mathbb{R}$, rezultă

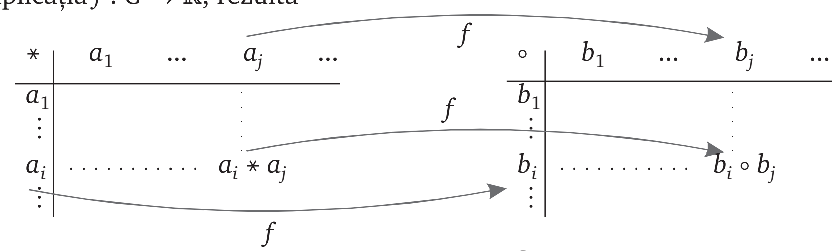

Fig. 3

Avem: $u \circ v = f(x) \circ f(y) = f(x * y)$, de unde $f^{-1}(u \circ v) = x * y = f^{-1}(u) * f^{-1}(v)$, $\forall\, u, v \in \Gamma$. Cum funcția $f^{-1} : \Gamma \to G$ este bijectivă și este îndeplinită condiția: $f^{-1}(u \circ v) = f^{-1}(u) * f^{-1}(v)$, $\forall\, u, v \in \Gamma$, rezultă că grupul $(\Gamma, \circ)$ este izomorf cu grupul $(G, *)$ și scriem $(\Gamma, \circ) \simeq (G, *)$ sau $\Gamma \simeq G$.

EXEMPLU

În exemplul studiat mai înainte am arătat că grupurile $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ și $(\Gamma, *)$ sunt izomorfe, unde $f : \mathbb{R}_+^* \to \Gamma, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, $\Gamma = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Funcția f fiind bijectivă, este inversabilă și avem: $f^{-1} : \Gamma \to \mathbb{R}_+^*$ și f^{-1} este bijectivă.

Avem $f^{-1}(y) = x = \frac{1-y}{1+y}$ sau $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Să arătăm că este îndeplinită și a doua condiție din definiția izomorfismului:

$$f^{-1}(x * y) = \frac{1 - x * y}{1 + x * y} = \frac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{1 + xy - x - y}{1 + xy + x + y} = \frac{(1-x) - (1-x)y}{(1+x) + (1+x)y} =$$

$$= \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-y}{1+y} = f(x) \cdot f(y).$$

Rezultă că grupurile $(\Gamma, *)$ și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ sunt izomorfe, $(\Gamma, *) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Efectuați în clasă

1. Arătați că mulțimea $M = \mathbb{R}^*$, în raport cu operația de înmulțire $\cdot : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $(x, y) \to xy$, este grup abelian, notat prin $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și numit grupul multiplicativ al numerelor reale, nenule.

2. Arătați că $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este grup abelian în raport cu operația de înmulțire indusă pe G de înmulțirea matricelor, $(G, \cdot)$.

3. Arătați că $f : \mathbb{R}^* \to G, f(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}$, cu $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$, este un izomorfism de grupuri, adică $(\mathbb{R}^*, \cdot) \simeq (G, \cdot)$.

4. Arătați că $f^{-1} : G \to \mathbb{R}^*$, unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$, este, de asemenea, un izomorfism de grupuri, adică $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Temă

1. Fie grupurile: $(\mathbb{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale și $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.
   Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$ este un izomorfism de grupuri.

   Arătați că $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ este, de asemenea, un izomorfism de grupuri.

2 . **a)** Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup, unde

$$G = (2, +\infty),\ * : G \times G \to G,\ (x, y) \to x * y \overset{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6.$$

b) Să se demonstreze că $(\Gamma, \circ)$ este grup, unde

$$\Gamma = (3, +\infty),\ \circ : \Gamma \times \Gamma \to G,\ (x, y) \to x \circ y \overset{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12.$$

c) Arătați că $f : G \to \Gamma, f(x) = x + 1$ este un izomorfism de grupuri.

d) Arătați că $f^{-1} : \Gamma \to G$ este de asemenea un izomorfism de grupuri, unde $f(x) = x + 1$.

e) Arătați că $f : \mathbb{R}_+^* \to \Gamma, f(x) = x + 3$ este un izomorfism între grupul $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, numit grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive, și grupul $(\Gamma, \circ)$ definit la subpunctul b) al acestui exercițiu.

3 . Pe mulțimea $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile „$*$“ și „$\circ$“ astfel:
$x * y = x + y + 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $x \circ y = x + y - 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.
Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ și $(\mathbb{Z}, \circ)$ sunt grupuri izomorfe.

4 . Se consideră grupurile:

$(M, \cdot)$, unde $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3x & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și

$(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \cdot)$ unde $\mathbb{Q}\sqrt{3} = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.
Să se arate că cele două grupuri sunt izomorfe.

5 . Se consideră grupurile:
$(\mathbb{R}, *), x * y = x + y - 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ și
$(\mathbb{R}, \circ), x \circ y = x + y - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \alpha x + \beta$, să stabilească un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, \circ)$.

6 . Fie $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}$ și aplicația $\cdot : G \times G \to G, (A, B) \to A \cdot B$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +)$.

7 . Fie $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se arate că G în raport cu operația indusă de înmulțirea matricelor formează grup abelian izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$.

8 . Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x > 0 \right\}$ și aplicația $G \times G \to G, (A, B) \to AB$. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

9 . Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \neq 0,\ i = \sqrt{-1} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se demonstreze

că $(G, \cdot)$ este grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule.

10. Fie $G = \left\{ A_{\frac{1}{2},x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & x & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q}^* \right\}$ și $f : G \to \mathbb{Q}^*, f\left(A_{\frac{1}{2},x} \right) = x$. Să se demonstreze

că $(G, \cdot)$ este un grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor raționale nenule $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$.

1 1 . Se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1$.

a) Știind că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$, să se determine valorile a și b.

b) Pentru valorile a și b determinate la punctul a), arătați că $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

Să se arate că $(\mathbb{C}, \perp)$, $(\mathbb{C}, \top)$ sunt grupuri izomorfe: $f : (\mathbb{C}, \perp) \to (\mathbb{C}, \top)$, $f(z) = iz$.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

Fie grupurile:

$G = \{ z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1 \}$

și $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\}$.

Să se demonstreze că:

a) $(G, \cdot)$ și $(\Gamma, \cdot)$ sunt grupuri; **(4p)**

b) funcția $f : G \to \Gamma$, $f(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ este un morfism de grupuri; **(3p)**

c) funcția $f^{-1} : \Gamma \to G$ este un izomorfism de grupuri. **(2p)**

B

Fie grupurile $(G, \circ)$, unde $G = \{f_1, f_2, f_3\}$, iar „$\circ$” este legea de compunere a funcțiilor $f_i : M \to M$, $i = 1, 2, 3$, $f_1(x) = x$,

$f_2(x) = \dfrac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}$ și $f_3(x) = \dfrac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$,

$M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, și grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul trei ale unității $(\Gamma, \cdot)$, unde $\Gamma = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 1$, $\varepsilon^3 = 1$.

a) Să se demonstreze că cele două grupuri sunt izomorfe: $(G, \circ) \simeq (\Gamma, \cdot)$, precizând funcția $f : G \to \Gamma$. **(4p)**

b) Să se precizeze f^{-1} și să se arate că $f^{-1} : \Gamma \to G$ este morfism de grupuri. **(5p)**

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.