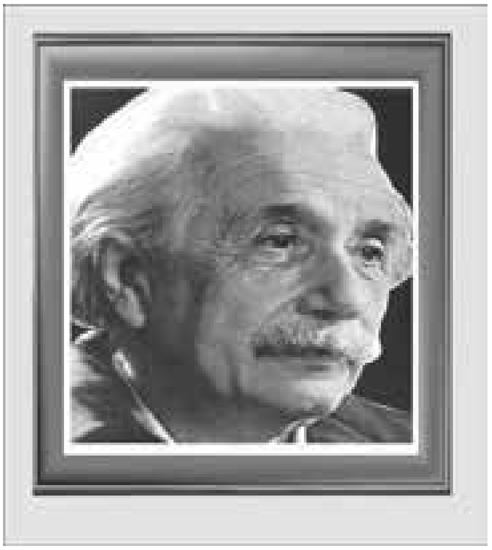
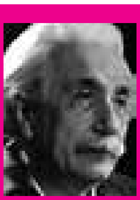
# TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE



**Albert Einstein (1879-1955)** a obţinut în anul 1921 premiul Nobel pentru serviciile aduse fizicii teoretice. În anul 1905, el a publicat explicaţia legilor experimentale ale efectului fotoelectric (descoperit în 1887 de H. Hertz) şi teoria relativităţii restrânse. În lucrarea „Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare”, Einstein afirmă că: „Experienţele întreprinse pentru a demonstra mişcarea Pământului în raport cu «mediul eter» în care se propagă lumina şi ale căror rezultate au fost negative fac să se nască presupunerea că nu numai în mecanică nici o proprietate a fenomenelor nu corespunde noţiunii de mişcare absolută, ci şi în electrodinamică. În toate sistemele inerţiale, pentru care ecuaţiile mecanicii rămân valabile, legile electrodinamicii şi opticii păstrează aceeaşi formă, ceea ce s-a demonstrat. Noi vrem să ridicăm această presupunere la rangul de postulat.” În teoria relativităţii restrânse, care se referă la fenomenele mecanice şi electromagnetice din sistemele de referinţă inerţiale, spaţiul şi timpul sunt două entităţi ce nu pot fi separate. Teoria relativităţii einsteiniene este valabilă pentru corpurile şi sistemele inerţiale relativiste (care au viteze relative de deplasare comparabile cu viteza $c$ a luminii în vid) sau nerelativiste.

Descoperirea radioactivităţii pusese în evidenţă că şi în cea mai mică particulă de substanţă există energie. Celebra ecuaţie a lui Einstein $E = mc^2$ susţine că o cantitate infimă de masă de substanţă corespunde unei enorme cantităţi de energie. Teoria relativităţii restrânse a fost confirmată în numeroase procese fizice.

după Roger Penrose, *Mintea şi legile fizicii*



# 1.1. BAZELE TEORIEI RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE

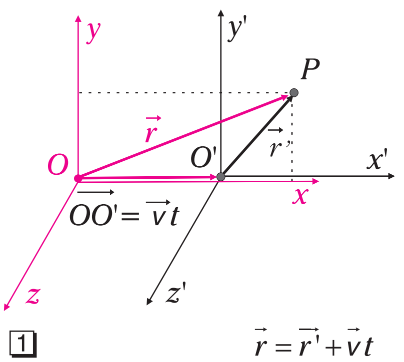
## 1.1.1. Relativitatea clasică

*„Dacă privim mișcarea unui tren, atunci o raportăm la suprafața Pământului, pe care o admitem în repaos. Când trenul se oprește la o stație, el se află în repaos în raport cu gara sau în raport cu Pământul. Dar fiindcă Pământul însuși se învârtește împrejurul axei sale și înaintează totodată în calea lui împrejurul Soarelui, repaosul trenului nu este un repaos real sau absolut, ci numai un repaos relativ la Pământ."*
M. Eminescu

***Relativitatea clasică*** se referă la fenomene mecanice raportate la sisteme de referinţă inerţiale, care se mişcă uniform. Sistemele de referinţă neinerţiale se mişcă accelerat.

Poziţia unui punct material, viteza şi traiectoria acestuia sunt relative, deoarece depind de sistemul de referinţă (referenţialul) ales. Noi nu simţim că ne mişcăm în spaţiu cu viteza Pământului, $v_p \approx 30$ km/s. Dacă un sistem de referinţă inerţial $S'$ se deplasează, faţă de sistemul de referinţă inerţial $S$, cu viteza $v$ pe direcţia axei $Ox$ şi considerăm că originile $O$ şi $O'$ ale celor două sisteme coincid la momentul $t = t' = 0$, atunci între coordonatele unui punct raportat la aceste sisteme de referinţă inerţiale, ca în figura 1, sunt valabile transformările lui Galilei:

$$\begin{cases} x = x' + vt; \\ y = y';\ z = z'; \\ t = t' \end{cases} \text{ şi, respectiv, } \begin{cases} x' = x - vt; \\ y' = y;\ z' = z; \\ t' = t. \end{cases}$$




Din transformările lui Galilei obţinem legea compunerii vitezelor pentru mişcările din mecanica newtoniană (clasică):

$$u_x = u'_x + v\,;\ u_y = u'_y\,;\ u_z = u'_z\,,$$

unde $u_x = \dfrac{dx}{dt}$ şi $u'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$ şi analog celelalte.

Viteza $\vec{u}$, de deplasare a punctului material $P$ față de sistemul de referință inerțial $S$ cu axele $xyz$, reprezintă suma vectorială a vitezei $\vec{u}'$ de deplasare a punctului material $P$ față de sistemul de referință inerțial $S'$ cu axele $x'y'z'$ și a vitezei $\vec{v}$ de deplasare relativă (de transport) a sistemului $S'$ față de sistemul $S$:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}.$$

**În conformitate cu principiul relativităţii din mecanica clasică, toate sistemele de referinţă inerţiale sunt echivalente în raport cu legile mecanicii.**

Propagarea luminii se face din aproape în aproape, cu viteză finită, analog cu propagarea unei unde elastice. Undele elastice nu se propagă în vid, neavând suport material, dar lumina se propagă cu viteza $c$, mai mare decât în alte medii. Fizicienii de la sfârşitul secolului al XIX-lea au considerat, prin analogie cu mediul elastic prin care se propagă undele elastice, un mediu ipotetic, numit eter, care există peste tot în spaţiu şi prin care se propagă undele electromagnetice.

Dacă viteza luminii are o valoare faţă de mediul eter, considerat ca sistem de referinţă absolut, atunci faţă de Pământ, care se deplasează cu viteza $v_p$ = 30 km/s în raport cu eterul, viteza luminii se obţine cu legea de compunere a vitezelor? Experimentele concepute pe această ipoteză au avut un rezultat negativ, deci eterul nu există.

**Experimentul fizicianului francez Fizeau a infirmat ipoteza eterului universal antrenat de un mediu optic în mişcare, făcută de Hertz**.

Un fascicul de lumină provenit de la sursa *S* este divizat de oglinda semitransparentă $O_1$:

– o parte din fascicul (**1**) se propagă în sens opus vitezei *v* de curgere a lichidului din tub,

– cealaltă parte din fascicul (**2**) se propagă în sensul vitezei de curgere a lichidului, până când întâlnesc din nou oglinda semitransparentă, pe care se reflectă şi, respectiv, o traversează, iar apoi interferă (fig. 2).

Undele sunt coerente deoarece provin de la aceeaşi sursă.

Viteza de propagare a luminii în raport cu lichidul este $c_1 = c/n$.

Dacă eterul din lichidul cu indicele de refracţie *n* este total antrenat de lichid, atunci între undele luminoase care se propagă în sensul curgerii lichidului şi cele care se propagă în sens contrar apare o diferenţă de timp şi nu sosesc în fază în câmpul franjelor de interferenţă:

$$\Delta t = \frac{2l}{c_1 - v} - \frac{2l}{c_1 + v} = \frac{4lv}{c_1^2 - v^2} \approx \frac{4lv}{c_1^2},$$

deoarece $v << \frac{c}{n}$.

Rezultă diferenţa de fază corespunzătoare:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T} \approx 2\pi\frac{4lvn^2}{c^2T} = 2\pi\frac{4lvn^2}{c\lambda},$$

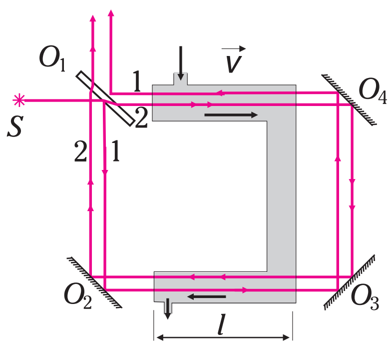
unde $l = cT$.

Pe figura de interferenţă, s-a constatat că franjele nu s-au deplasat faţă de situaţia când lichidul nu mai curge.

**Ipoteza eterului şi regula clasică de compunere a vitezelor în cazul luminii nu au fost confirmate**, deoarece Fizeau nu a observat deplasarea prevăzută teoretic.

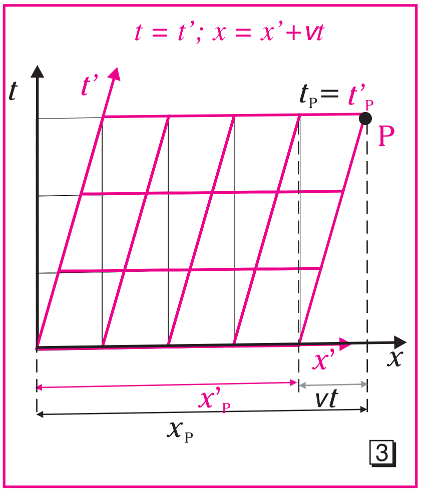
,, Prin intermediul experimentului omul de știință creează informație și apoi interpretează în conformitate cu ideile sale tot ce recepționează. Cunoașterea este un proces la care participă imaginația omenească și lumea exterioară."

Ernest Hutten, *Ideile fundamentale în fizică*




2

**Obs** Ipoteza eterului și regula clasică de compunere a vitezelor în cazul luminii nu au fost confirmate, deoarece Fizeau nu a observat deplasarea prevăzută teoretic.




*În relativitatea clasică,* intervalul de timp dintre două evenimente și simultaneitatea a două evenimente care se desfășoară în două puncte diferite nu depinde de referențialul ales, deoarece

$$t = t'.$$

În figura 3, valorile noilor sau vechilor coordonate, ale unui eveniment, sunt date de transformările Galilei:

$$t = t';$$
$$x = x' + vt$$

şi pot fi citite prin desenarea unor axe care intersectează sistemul de coordonate.

**Ipoteza lui Lorentz admitea existenţa eterului imobil ca sistem de referinţă absolut**, deci suport al undelor electromagnetice. Această ipoteză fost infirmată printr-un experiment efectuat de Albert Michelson (1881).

Presupunând că Pământul se mişcă în jurul Soarelui printr-un „ocean de eter” imobil, faţă de care lumina se propagă cu viteza $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, atunci viteza luminii faţă de un observator terestru este obţinută cu legea compunerii vitezelor?

## 1.1.2. Experimentul lui Michelson

În interferometrul Michelson, un fascicul monocromatic de lumină provenit de la sursa $S$ trece printr-o fantă îngustă şi ajunge la o lamă cu feţe plane şi paralele (fig. 4). Această lamă are o faţă semitransparentă şi divizează fasciculul de lumină: o parte din acesta străbate lama, se reflectă pe oglinda plană $O_1$, ajunge pe lamă şi se reflectă către ochiul observatorului; cealaltă parte a fasciculului se reflectă pe lamă, ajunge pe oglinda plană $O_2$, se reflectă înapoi şi străbate lama către ochiul observatorului.

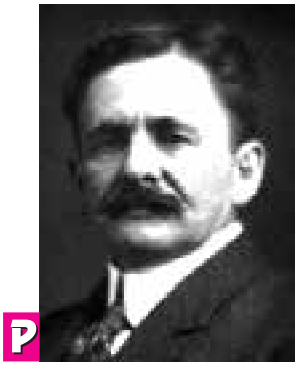
Braţele interferometrului între lamă şi oglinzile $O_1$ şi, respectiv, $O_2$ sunt riguros egale, de lungime $L$.

În calea unui fascicul se introduce o lamă compensatoare a drumului optic, perfect transparentă şi cu aceeaşi grosime ca lama semitransparentă, pentru ca fiecare fascicul să străbată de trei ori grosimea unei lame.

Interferometrul a fost montat pe un bloc rigid din piatră care se putea roti într-o cadă cu mercur.

Cele două fascicule de lumină sunt coerente şi interferă. Franjele pot fi analizate de observator printr-o lunetă.

Experimental nu s-a observat deplasarea prognozată, cu legea compunerii vitezelor, a franjelor de interferenţă.



Albert Michelson – premiul Nobel (1907) pentru instrumentele sale optice de precizie și pentru cercetările metrologice efectuate cu ajutorul lor.

* Fig. 3 după Hans Ohanian, Physics, Union College and Rensselaer Polytechnic Institute, New York, 1985.

## Analiza şi implicaţiile experimentului

În experimentul lui Michelson, reluat de Morley, un braţ al interferometrului coincide cu direcţia de deplasare a Pământului în raport cu eterul imobil.

Datorită mişcării relative a Pământului cu viteza relativă $v_p \approx 30$ km/s faţă de eter, pe Pământ ar trebui să apară un „vânt de eter” cu aceeaşi viteză, dar orientată în sens opus mişcării de revoluţie.

Din legea compunerii vitezelor:

$$\vec{c}_{lumin\check{a}\to eter} = \vec{u}'_{lumin\check{a}\to P\check{a}m\hat{a}nt} + \vec{v}_{P\check{a}m\hat{a}nt\to eter} =$$
$$= \vec{u}'_{lumin\check{a}\to P\check{a}m\hat{a}nt} - \vec{v}_{eter\to P\check{a}m\hat{a}nt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{u}'_{lumin\check{a}\to P\check{a}m\hat{a}nt} = \vec{c}_{lumin\check{a}\to eter} + \vec{v}_{eter\to P\check{a}m\hat{a}nt}.$$

Cele două trenuri de unde se propagă dus-întors de-a lungul braţelor interferometrului în intervale de timp diferite $t_1$ şi $t_2$, deci nu sosesc în fază în câmpul franjelor de interferenţă (fig. 4).

Dacă se roteşte interferometrul cu 90°, atunci diferenţa de fază între cele două trenuri de unde trebuie să se schimbe, deci şi franjele din figura de interferenţă ar fi logic să se schimbe.

Notăm raportul vitezelor $\beta = \frac{v}{c}$.

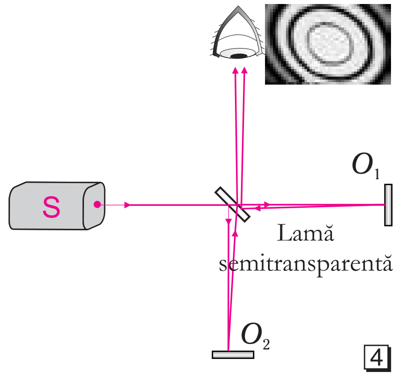
Deoarece $v << c$ şi $\beta << 1$, vom folosi aproximările:

$$\frac{1}{1-\beta^2} \approx 1+\beta^2 \text{ şi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}\beta^2} \approx 1+\frac{1}{2}\beta^2.$$

Intervalele de timp $t_1$ şi $t_2$ se calculează analog cazului bărcilor care pleacă simultan longitudinal şi, respectiv, transversal cu o viteză $c$ faţă de apa care curge cu viteza $v$ şi parcurg aceeaşi distanţă $L$ faţă de punctul de plecare:

$$t_{1,longitudinal} = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2-v^2} =>$$



4

Experimentul efectuat de Michelson în 1881 a fost repetat de Michelson și Morley în 1887 și de Morley și Miller în 1904. Rezultatul negativ a dus la concluzia că principiile generale ale mecanicii newtoniene au caracter limitat. A apărut necesitatea elaborării unei noi teorii capabile să explice faptele experimentale acumulate.

Noua teorie a relativității restrânse, în acord cu experimentele, a convins fizicienii secolului XX că viteza de propagare a luminii în vid nu depinde de viteza sursei de lumină sau a observatorului. Renunțarea la concepțiile clasice nu a fost ușoară, deoarece trebuia concepută o teorie care să înglobeze, ca pe un caz particular, teoria clasică.

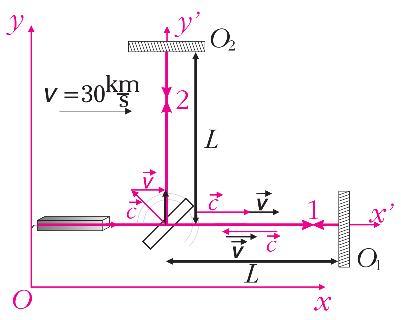
**P** Realizează pe parcursul anului școlar portofoliul cu tema: „Contribuția laureaților premiului Nobel la dezvoltarea fizicii moderne”.

Portofoliul va cuprinde lucrările indicate în manual cu sigla **P**. Poți completa portofoliul și cu alte lucrări: fișe de observații sau documentare, curiozități etc. Consultă diverse surse bibliografice: cărți, reviste de specialitate, enciclopedii, rețeaua Internet etc.

$$t_{1,longitudinal} = \frac{2L}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right);$$

$$t_{2,transversal} = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Rezultă că, în funcţie de direcţia de propagare a luminii, viteza luminii faţă de eter, notată cu $\vec{c}$, se compune cu viteza eterului faţă de Pământ, notată cu $\vec{v}$ (fig. 5).




5

Dacă două trenuri de unde pleacă simultan de pe lamă, atunci vor reveni cu o întârziere

$$\Delta t = t_{1,longitudinal} - t_{2,transversal} = \frac{L}{c}\frac{v^2}{c^2} = \frac{L}{c}\beta^2.$$

Prin rotirea plăcii de marmură cu 90°, intervalul de timp îşi schimbă semnul şi ar fi trebuit să apară o diferenţă de timp dublă $\Delta t_{total} = 2\Delta t = 2\frac{L}{c}\beta^2$, căreia ar fi trebuit să-i corespundă o deplasare a franjelor de interferenţă cu un număr $N$ de interfranje: $N = \frac{c\Delta t_{total}}{\lambda} \neq 0$.

**Obs**

**Transformările Galilei** sunt valabile la viteze mici, în raport cu viteza luminii.

Interacțiunile nu se pot propaga cu viteze mai mari decât viteza luminii în vid.

Presupusul eter nu joacă nici un rol, deci acest concept trebuia abandonat. Prin negarea existenței eterului, câmpul electromagnetic devine o entitate independentă de orice substanță. Din momentul în care fasciculul de lumină atinge primul element optic al sistemului, prin acel sistem nu se mai propagă fasciculul inițial, ci unul reflectat sau refractat, emis de elementul optic respectiv, conform principiului Huygens-Fresnel. Acestea se propagă cu viteze care depind de indicele de refracție al mediului respectiv și nu de viteza de mișcare a acestora.

**C** **Experimental nu s-a observat deplasarea semnificativă a franjelor de interferenţă** când braţele sunt rotite cu 90° nici în 1881 şi nici ulterior. **Acest rezultat negativ din istoria fizicii a dus la concluzia că ipotezele sunt greşite.**

Din insuccesul experimentului Michelson, Einstein a tras concluzia că lumina are aceeaşi viteză de propagare ***c*** pe oricare direcţie din interferometru, indiferent de orientarea braţelor acestuia, deci nu apare diferenţă de drum sau diferenţă de timp şi nici deplasare a franjelor când braţele sunt rotite cu 90°.

# 1.2. POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE. TRANSFORMĂRILE LORENTZ. CONSECINŢE

## Postulatele teoriei relativităţii restrânse

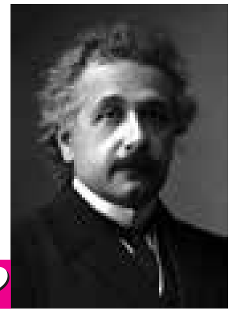
Concluziile analizei faptelor experimentale au fost sintetizate în anul 1905 de Einstein în cele **două postulate ale teoriei relativităţii restrânse**:

1. Fenomenele fizice se desfăşoară identic în toate sistemele de referinţă inerţiale, dacă sunt identice condiţiile iniţiale, adică ***legile fizicii sunt aceleaşi faţă de oricare sistem de referinţă inerţial***.

2. ***Viteza de propagare a luminii în vid are aceeaşi valoare în toate direcţiile din toate sistemele de referinţă inerţiale***, adică nu depinde de mişcarea sursei de lumină sau a observatorului ($\boldsymbol{c} = 2{,}997924 \cdot 10^8$ m/s).

Primul postulat generalizează principiul relativităţii din mecanică. Acest postulat conduce la echivalenţa sistemelor de referinţă inerţiale în raport cu toate fenomenele fizice (nici un experiment efectuat într-un sistem de referinţă inerţial nu permite punerea în evidenţă a mişcării rectilinii uniforme a acestui sistem faţă de alt sistem de referinţă inerţial).

Echivalenţa sistemelor de referinţă inerţiale o regăsim formulată şi în postularea constanţei vitezei luminii, deoarece al doilea postulat reprezintă concluzia experimentală că viteza luminii în vid este viteza maximă de propagare a oricărei interacţiuni fizice.



Albert Einstein – premiul Nobel (1921) ,,pentru serviciile aduse fizicii teoretice și mai cu seamă pentru explicarea efectului fotoelectric”. Teoria relativității a revoluționat fizica.

**Obs**

- Postulatele teoriei relativității restrânse susțin eliminarea eterului universal și a noțiunilor: sistem de referință absolut, timp absolut, propagare instantanee a interacțiunilor (viteză infinită), admise în mecanica clasică.

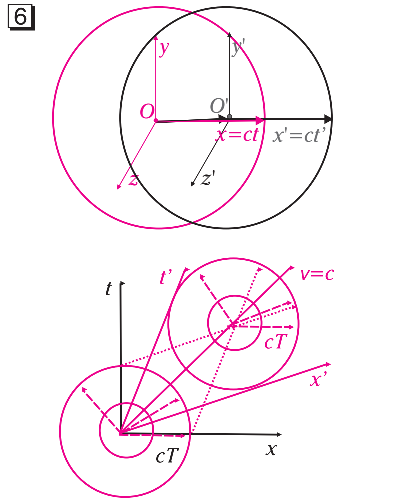
Teoria relativității restrânse se referă la fenomene mecanice și electromagnetice care se analizează în raport cu sisteme de referință inerțiale (SRI). Toate sistemele de referință inerțiale sunt echivalente, în raport cu legile fizicii (în condiții identice un fenomen fizic se desfășoară la fel în SRI diferite).

- Sistemele de referință neinerțiale (care se mișcă accelerat) și fenomenele gravitaționale sunt studiate de teoria relativității generalizate, elaborată ulterior de Einstein.
- Coordonatele spațio-temporale, din cele două sisteme inerțiale, ale aceluiași eveniment depind reciproc unele de altele.
- Dacă $v << c$, din transformările Lorentz se obțin transformările Galilei.

## Transformările Lorentz

Trecerea de la un sistem de referinţă inerţial la un alt sistem de referinţă inerţial se obţine cu transformările Lorentz, care sunt valabile şi la viteze apropiate de viteza luminii. Transformările Lorentz sunt relaţii matematice cu ajutorul cărora trecem de la coordonatele unui eveniment observat din sistemul inerţial $S$, în punctul de coordonate $x$, $y$, $z$ la momentul $t$, la coordonatele aceluiaşi eveniment observat din sistemul inerţial $S'$, care se deplasează cu viteza constantă $v$ în raport cu sistemul $S$ de-a lungul axei $Ox$, în punctul de coordonate $x'$, $y'$, $z'$ la momentul $t'$.

Aceste transformări stabilite de Lorentz, ca o generalizare a transformărilor Galilei, înainte de elaborarea teoriei relativităţii restrânse pot fi obţinute folosind postulatele lui Einstein.

6



$(c\,t')^2 - x'^2 = (c\,t)^2 - x^2$ este invariant.

O rază de lumină emisă la momentul de timp $t' = t = 0$, din originea comună $x' = x = 0$, a ajuns în punctul $x = ct$ din sistemul $x$, $t$ la momentul $t = T$, iar în sistemul $x'$, $t'$, în punctul

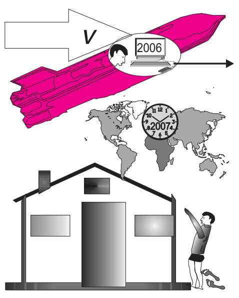
$$x' = \frac{cT - vT}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = cT\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

la momentul de timp

$$t' = \frac{T - \frac{v}{c^2}cT}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = T\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Viteza luminii în sistemul $(x', t')$ este

$$\frac{x'}{t'} = c\,.$$




7

Mărimile $v$; $x$; $y$; $z$; $t$ sunt măsurate de observatorul din sistemul de referință inerțial $S$, legat de Pământ, iar mărimile $-v$; $x'$; $y'$; $t'$ sunt măsurate de observatorul din sistemul inerțial $S'$ (fig. 7).

Considerăm că originile $O$ şi $O'$ ale sistemelor $S$ şi $S'$ cu axele paralele coincid la momentul iniţial $t = t' = 0$ şi relaţiile de transformare sunt liniare:

$x = k\,(x' + vt')$ şi $x' = k\,(x - vt)$, iar $y = y'$ şi $z = z'$.

Putem găsi factorul $k$ dacă în momentul iniţial considerăm un semnal luminos, emis de o sursă punctiformă din originea axelor (fig. 6) . Acesta se propagă cu aceeaşi viteză ($c = c'$) şi frontul de undă sferic cu centrul în $O$ ajunge pe axa $Ox$ în punctul cu abscisa $x = R = ct$ pentru observatorul $S$ şi, respectiv, cel cu centrul în $O'$ ajunge pe axa $O'x'$ în punctul cu abscisa $x' = R' = ct'$ faţă de observatorul $S'$. Dacă în relaţiile de transformare înlocuim $t' = \frac{x'}{c}$ şi $t = \frac{x}{c}$, obţinem

$$x = k\left(x' + \frac{vx'}{c}\right) \text{ şi, respectiv, } x' = k\left(x - \frac{vx}{c}\right).$$

Înmulţim aceste relaţii membru cu membru:

$$xx' = k^2 xx'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Rezultă $k = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, unde $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Obţinem **transformările Lorentz ale coordonatelor spaţiale**:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y = y';\ z = z' \text{ şi, respectiv,}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}};\ y' = y;\ z' = z$$ – sunt aceleaşi coordonate spaţiale pentru ambii observatori.

Din relaţiile $t = \frac{x}{c}$ şi $t' = \frac{x'}{c}$ obţinem **transformările Lorentz ale coordonatelor temporale**:

$$t = \frac{x' + vt'}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ şi, respectiv,}$$

$$t' = \frac{x - vt}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Transformările Lorentz inverse le obţii prin schimbarea semnului vitezei de translaţie relative a sistemelor ($v$ cu $-v$) şi înlocuirea $x$ cu $x'$ şi, respectiv, $t$ cu $t'$.

## Consecinţele transformărilor Lorentz

### 1. *Dilatarea intervalelor de timp (lectură)

Considerăm $\Delta t_0 = t_2 - t_1$ intervalul de timp propriu sau *durata statică*, a unui proces, cronometrată de un observator care este în repaus într-un punct ($x_1 = x_2$) din acelaşi sistem $S$ în care este localizat procesul.

Considerăm *durata cinematică* $\Delta t = t'_2 - t'_1$ a aceluiaşi proces (dintre două semnale luminoase, de exemplu) cronometrată de un observator în mişcare relativă, cu viteza relativistă $\vec{v}$ paralelă cu axa $Ox'$, faţă de sistemul în care se consideră că are loc procesul.

Din transformările Lorentz rezultă:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2} - t_1 + \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

adică $\boldsymbol{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}}$, *durata cinematică* este mai mare decât *durata statică,* deci $\Delta t > \Delta t_0$ (fig. 8), deoarece $\sqrt{1-\beta^2} < 1$.

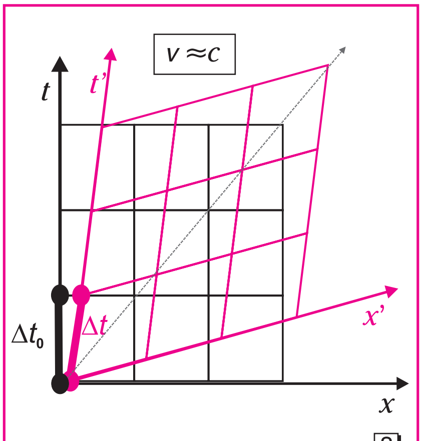
### 2. Durata unui eveniment este relativă deoarece depinde de sistemul de referinţă din care se măsoară. Simultaneitatea evenimentelor este şi ea relativă.

Considerăm două evenimente simultane în sistemul $S$ (se produc la momentul $t_1 = t_2$), dar în locuri diferite ($x_1 \neq x_2$). Momentele de timp corespunzătoare pentru observatorul din sistemul $S'$ se obţin cu relaţiile Lorentz:

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ şi } t'_2 = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Rezultă că $t'_1 \neq t'_2$, deoarece $x_1 \neq x_2$, deci **două evenimente simultane în locuri diferite ale unui sistem inerţial apar consecutive în alt sistem de referinţă inerţial $S$**:

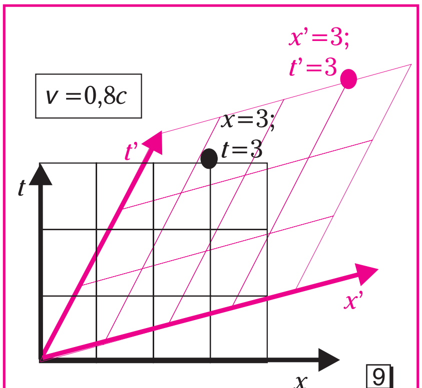
$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \dfrac{-v(x_2 - x_1)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$. Apar simultane şi în sistemul $S'$ numai evenimentele simultane care s-au produs în acelaşi loc ($x_1 = x_2$) din $S$ (fig. 9).




8

Dacă $v = 0{,}8c$ (m/s); $x = 0$ (m) şi $\Delta t_0 = 1$ s obţinem după înlocuiri: $\Delta t = 1{,}66$ s. Traiectoria unui semnal luminos emis din originea O a axelor *rectangulare* $x$, $t$ (pentru sistemul de referinţă al Pământului) şi, respectiv, a axelor înclinate $x'$, $t'$ (pentru sistemul de referinţă care se deplasează cu o viteză relativistă) poate fi considerată axă de simetrie. Coordonatele unui eveniment pot fi citite uşor în aceste diagrame Minkowski, dacă se consideră unitatea de lungime egală cu $c$ (distanţa parcursă de lumină în vid în timp de o secundă, numită secunda-lumină).

**C Durata cinematică a unui proces măsurată de un observator în mişcare faţă de sistemul propriu este mai mare decât durata statică a aceluiaşi fenomen măsurată de un observator aflat în sistemul propriu.**




9

* Figurile 8 şi 9 după webphysics.davidson.edu/ Applets/minkowsky4/default.html

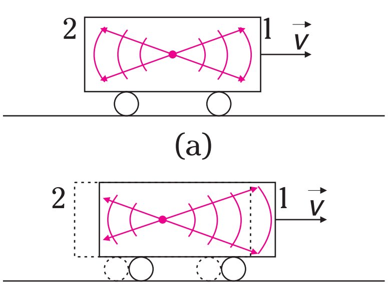
„*Experimentele virtuale încearcă să stabilească legătura realităţii cu lumea vastă a impresiilor noastre. Aşadar, aceste construcţii ale minţii noastre sunt justificate în măsura şi în sensul în care teoriile noastre reuşesc să realizeze această legătură.*”
A. Einstein, L. Infeld, *Evoluţia fizicii*

**A1.** Considerăm un experiment *virtual*: un blitz al unui observator aşezat în mijlocul unui vagon, care se mişcă cu viteza $v$, emite un semnal luminos care se propagă cu viteza $c$ în ambele sensuri, deci fronturile de undă ajung simultan la cei doi pereţi opuşi (fig. 10). Pentru un observator de pe Pământ, lumina se propagă în cele două sensuri cu aceeaşi viteză $c$, dar în intervalul de timp în care un perete se depărtează, celălalt se apropie de semnalul luminos şi cele două fronturi de undă nu ajung simultan la cei doi pereţi.

Rezultă că evenimentul luminos se desfăşoară mai rapid faţă de sistemul propriu decât faţă de alt sistem care se translatează faţă de acesta cu o viteză relativistă $v$.

Durata cinematică a unui proces apare mai mare oricărui observator „mobil” din exterior decât durata statică măsurată de observatorul „fix”, din propriul sistem, pentru care procesul se produce în acelaşi loc. Pentru fiecare observator putem considera real timpul măsurat în propriul sistem de referinţă. Cronometrarea se poate face cu orice fenomen periodic ce permite măsurarea duratelor.

Einstein şi-a imaginat că îndepărtându-se faţă de un turn cu ceas, cu viteza luminii, ceasul din turn părea că s-a oprit.




10

Viteza luminii în vid are aceeași valoare în toate direcțiile și în toate sistemele de referință inerțiale, fiind independentă de mișcarea sursei de lumină sau a observatorului.

**A2.** Considerăm un alt experiment virtual (fig. 11), în care semnalul luminos produs de un blitz în punctul $B_1$ din sistemul $S'$ se propagă până la o oglindă şi înapoi în intervalul de timp propriu:

$$\Delta t_0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1 = \frac{2d}{c}.$$

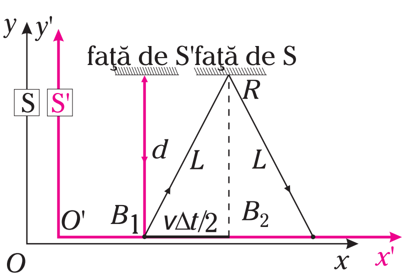
Pentru observatorul din sistemul $S$, acest semnal luminos parcurge lungimea $2L$ până la oglindă şi înapoi în intervalul de timp:

$$\Delta t = \frac{2L}{c},$$

viteza luminii fiind aceeaşi, $c$.

Scriem teorema lui Pitagora în triunghiul $B_1RB_2$:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 \Rightarrow (\Delta t)^2 = (\Delta t')^2 + \frac{v^2}{c^2}(\Delta t)^2.$$




11

Obţinem:

$$(\Delta t)^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=(\Delta t')^2,$$

dar $\Delta t_0 = \Delta t'$; $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sau $\Delta t > \Delta t_0$, unde $\beta = \dfrac{v}{c}$.

Ajustând distanţa dintre blitz şi oglindă, acest sistem se poate sincroniza cu un ceas electronic. Din punctul de vedere al observatorului de pe Pământ, ceasul cu pulsuri luminoase dintr-o navetă relativistă cronometrează mai încet, adică timpul se dilată.

Observăm că în cazul în care blitzul şi oglinda ar fi în sistemul $S$, atunci intervalul de timp propriu ar deveni

$$\Delta t_0 = \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2d}{c}.$$

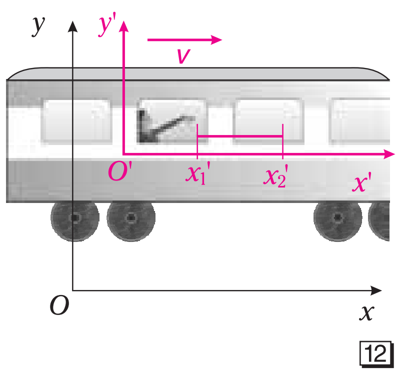
Pentru observatorul din $S'$, intervalul de timp în care semnalul se propagă până la oglindă şi înapoi este: $\Delta t' = \dfrac{2L}{c}$.

Din teorema lui Pitagora obţinem analog:

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = d^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2 \text{ şi}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ deci } \Delta t' > \Delta t_0.$$

Observatorul din racheta relativistă va considera că ceasul cu pulsuri luminoase de pe Pământ cronometrează mai încet.




## 3. *Contracţia lungimilor

Considerăm o riglă în repaus de-a lungul axei $O'x'$. Observatorul din sistemul $S'$ va măsura lungimea proprie (de repaus):

$$l_0 = x'_2 - x'_1 \text{ (fig. 12)}.$$

Pentru observatorul din sistemul $S$, coordonatele capetelor riglei, măsurate simultan ($t_1 = t_2$), vor fi $x_1$ şi respectiv $x_2$, iar lungimea devine $l = x_2 - x_1$. Din transformările Lorentz rezultă:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ sau } l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Deoarece $\sqrt{1-v^2/c^2} < 1$, rezultă că pentru observatorul faţă de care rigla se mişcă cu viteza $v$, lungimea riglei este micşorată ($l < l_0$).

**C** Rigla are lungimea mai mare în sistemul față de care se află în repaus, numit *sistem propriu*, iar această lungime se numește și *lungime proprie* sau *de repaus*. În cazul în care rigla este așezată perpendicular pe direcția de mișcare, atunci $l = l_0$, deoarece $y' = y$ și $z' = z$. Contracția are loc numai după direcția de mișcare, deci un corp cu volumul $V_0$ în sistemul propriu va avea un volum

$$V = V_0\sqrt{1-v^2/c^2}$$

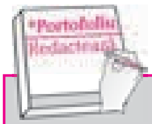
în sistemul față de care corpul se mișcă cu viteza $v$.

Dacă se consideră rigla în repaus în sistemul $S$ de-a lungul axei $Ox$, atunci lungimea proprie riglei (măsurată de un observator aflat în repaus faţă de aceasta) este:

$$l_0 = x_2 - x_1.$$

Pentru un observator din sistemul mobil $S'$, lungimea cinematică a riglei între extremităţile înregistrate simultan ($t'_1 = t'_2$) devine $l = x'_2 - x'_1$.

Deoarece $x_2 - x_1 = \dfrac{x'_2 + vt'_2 - x'_1 - vt'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, rezultă $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, adică lungimea cinematică, măsurată din alt sistem de referinţă inerţial, este mai mică pe direcţia de mişcare decât lungimea proprie, măsurată în sistemul de referinţă propriu al corpului considerat.



Analizează și comentează următorul fragment din „Sărmanul Dionis”, în care înțeleptul Ruben îl îndeamnă pe erou să călătorească departe: „…Vei trăi un secol și ți se va părea o zi… Eu sigur voi fi mort când vei reveni tu, căci orele vieții tale vor fi șir de ani întregi pentru Pământ”.
Relativitatea a fost intuită de poetul Mihai Eminescu?

**Considerăm ca aplicaţie un experiment virtual** în care observatorul din sistemul mobil $S'$ cronometrează intervalul de timp propriu necesar propagării unui semnal luminos emis de o sursă fixată la capătul unei rigle, în repaus pe axa $O'x'$, până la oglinda fixată la celălalt capăt la distanţa $l_0$ şi înapoi:

$\Delta t_0 = \dfrac{2l_0}{c}$, unde $l_0 = x'_2 - x'_1$ este lungimea proprie măsurată din sistemul propriu (fig. 13).

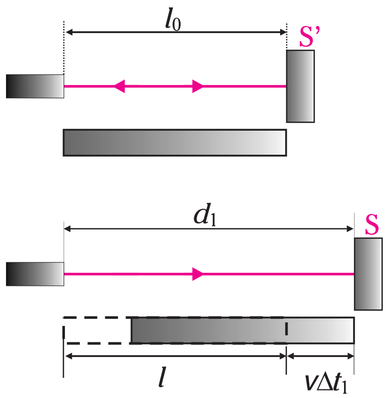
Această riglă, care se deplasează cu viteza $v$ a sistemului $S'$ prin dreptul observatorului din sistemul $S$ de pe sol, are lungimea $l$.

În intervalul de timp $\Delta t_1$, semnalul luminos parcurge distanţa $d_1 = l + v\Delta t_1 = c\,\Delta t_1$, iar oglinda parcurge distanţa $v\Delta t_1$, deci $\Delta t_1 = \dfrac{l}{c-v}$.

Semnalul luminos reflectat de oglindă se întoarce de la oglindă la sursă în intervalul de timp $\Delta t_2$ în care oglinda şi sursa au înaintat pe distanţa $v\Delta t_2$, deci $d_2 = l - v\Delta t_2 = c\,\Delta t_2$, de unde $\Delta t_2 = \dfrac{l}{c+v}$. Obţinem timpul total:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2l}{c\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}.$$

$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$. Înlocuim şi obţinem: $\dfrac{2l_0}{c} = \dfrac{2l\sqrt{1-\beta^2}}{c\left(1-\beta^2\right)}$ sau $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$.




13

O confirmare a consecinţelor transformărilor Lorentz a fost obţinută la dezintegrarea spontană a mezonilor din radiaţia cosmică. Timpul propriu de viaţă al mezonilor (la viteze mici) este $\Delta t_0 = 2{,}2\ \mu s$. Mezonii produşi la altitudini mari se deplasează cu viteza $v = 0{,}998c$ faţă de Pământ, deci în sistemul referinţă, legat de mezonii produşi, aceştia ar parcurge distanţa: $l = v\Delta t_0 \approx 658{,}7$ m. Cât este altitudinea la care sunt produşi mezonii?

***Rezolvare***

Timpul de viaţă al mezonilor, pentru un observator terestru, este $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \approx 34{,}8 \cdot 10^{-6}$ s şi distanţa parcursă de mezoni faţă de observatorul terestru este: $l_0 = v\Delta t \approx 10420$ m. Altitudinea la care sunt produşi mezonii, măsurată în sistemul observatorului din laboratorul terestru, verifică relaţia:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \approx 10\,420 \text{ m.}$$

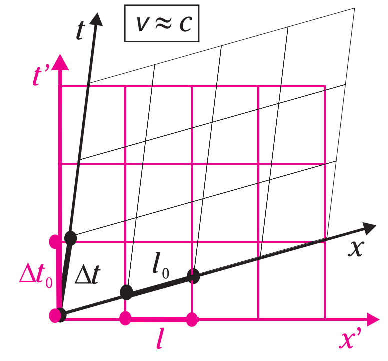
**C** Reţinem că lungimea proprie, măsurată în sistemul de referinţă terestru de observatorul „fix”, are cea mai mare valoare $\boldsymbol{l}_0$, iar lungimea cinematică $\boldsymbol{l}$, măsurată din alt sistem de referinţă inerţial, este mai mică pe direcţia de mişcare:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \quad \text{(fig. } \boxed{14}\text{).}$$

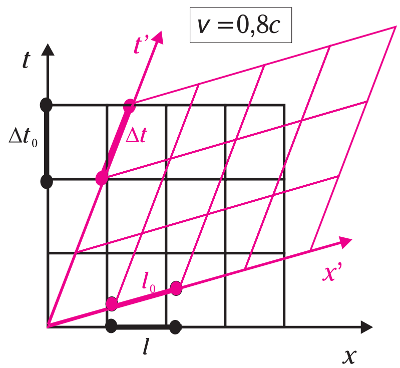
Contracţia lungimilor de-a lungul direcţiei de mişcare arată că nici un sistem inerţial nu este privilegiat, deoarece nu se poate pune în evidenţă care sistem este în mişcare şi care este în repaus. Distanţa dintre două puncte apare mai mică observatorului din sistemul care se mişcă relativ cu o viteză relativistă faţă de ele.

Poţi accepta o modelare intuitivă a lungimilor aparente ale corpurilor (fig. $\boxed{15}$ a) – care depind de viteza relativă faţă de observator – dacă urmăreşti distanţa dintre stâlpii plasaţi echidistant pe sol sau lungimile vagoanelor unui tren dintr-un sistem în repaus şi apoi în mişcare (fig. $\boxed{15}$ b)?

Durata cinematică $\boldsymbol{\Delta t}$ a unui proces apare mai mare oricărui observator „mobil” din exterior decât durata statică $\Delta \boldsymbol{t}_0$ măsurată de observatorul „fix”, din propriul sistem, pentru care procesul se produce în acelaşi loc.

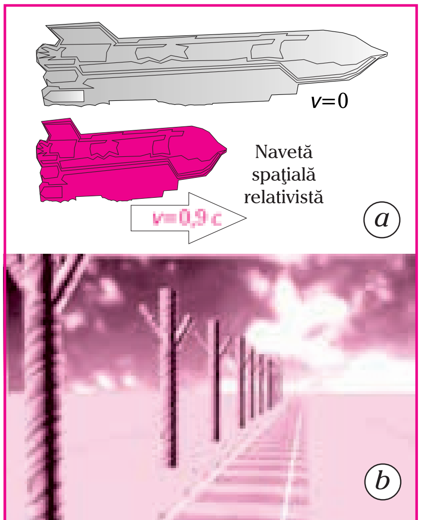



La $t'_1 = t'_2$; $l = x'_2 - x'_1$; $l < l_0$.

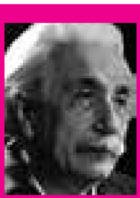



La $t_1 = t_2$; $l = x_2 - x_1$; $l < l_0$.
În $x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta t_0 = t_2 - t_1$; $\Delta t > \Delta t_0$.

$\boxed{14}$




$\boxed{15}$



# 1.3. ELEMENTE DE CINEMATICĂ ŞI DINAMICĂ RELATIVISTĂ

*„Ce înţelegem prin două evenimente simultane într-un sistem de coordonate? Intuitiv, fiecare dintre noi are impresia că înţelege această afirmaţie. Dar să încercăm să fim precauţi, să încercăm să dăm definiţii riguroase, căci ştim cât de primejdios este să supraestimăm intuiţia noastră."*

A. Einstein

## 1.3.1. Compunerea relativistă a vitezelor (*$F_2$)

● Considerăm un punct material care se mişcă uniform rectiliniu de-a lungul axei $O'x'$ cu viteza relativă $u'_x$ faţă de observatorul din sistemul mobil $S'$ (fig. 16). Originea $O'$ a axei $O'x'$ se translatează cu viteza $v$ faţă de axa $Ox$ din sistemul $S$ (un laborator terestru).

Trecerea de la legea mişcării uniforme $x' = u'_x t'$ faţă de axa $O'x'$ din sistemul inerţial $S'$ la legea mişcării uniforme $x = u_x t$ faţă de axa $Ox$ din sistemul inerţial $S$ se obţine cu ajutorul transformărilor Lorentz:

$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$ şi $t' = \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, unde $\beta = \dfrac{v}{c}$. Înlocuim în expresia $x' = u'_x t'$ şi obţinem $\dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = u'_x \dfrac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ sau

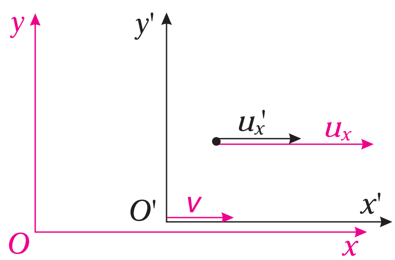
$x\left(1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}\right) = (v + u'_x)\, t$. Deoarece $u_x = \dfrac{x}{t}$, rezultă că viteza relativă a punctului considerat faţă de axa $Ox$ are expresia:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}}.$$

Puteam obţine această expresie pentru $u_x$ sau expresia pentru $u'_x$ folosind definiţiile componentelor vitezelor: $u_x = \dfrac{dx}{dt}$ şi $u'_x = \dfrac{dx'}{dt'}$. Derivăm relaţiile Lorentz şi obţinem:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ şi } \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Rezultă expresiile matematice pentru compunerea relativistă a vitezelor:




$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{u'_x v}{c^2}} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}.$$

16

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{u_x - v}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{vu_x}{c^2}},$$

$$\text{deci}\quad u'_x = \frac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}}.$$

Dacă $v \ll c$, obţinem formula de compunere a vitezelor din mecanica clasică: $u_x = u'_x + v$.

Dacă în sistemul $S'$ este emis un semnal luminos de-a lungul axei $O'x'$ cu viteza $u'_x = c$ şi sistemul $S'$ se translatează faţă de sistemul $S$ cu viteza $v$ sau chiar cu viteza $v = c$, atunci obţii cu expresia relativistă a compunerii vitezelor că semnalul luminos se propagă cu viteza $u_x = c$ şi de-a lungul axei $Ox$, (fig. 17):

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c.$$

● Considerăm un punct material care se mişcă rectiliniu uniform de-a lungul axei $O'y'$ cu viteza relativă $u'_y$. Ecuaţia mişcării în sistemul $S'$ este:

$$y' = u'_y t'.$$

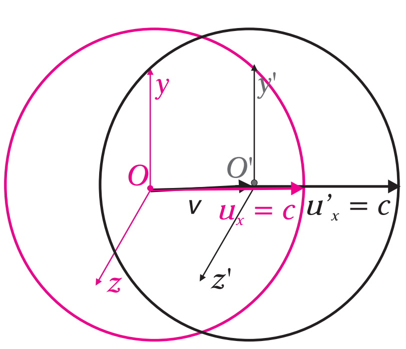
Cu ajutorul transformărilor Lorentz, $y' = y$ şi $t' = \dfrac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, obţinem ecuaţia mişcării în sistemul $S$:

$$y = u'_y\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{u'_y t\left(1-\frac{vx}{tc^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

În acest caz, raportul $\dfrac{x}{t} = v$ reprezintă chiar viteza de translaţie a originii $O'$ faţă de originea $O$. Rezultă:

$$y = \frac{u'_y t\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = u_y t,$$

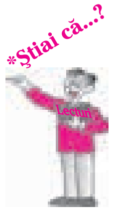
unde: $u_y = \dfrac{u'_y\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = u'_y\sqrt{1-\beta^2}$.



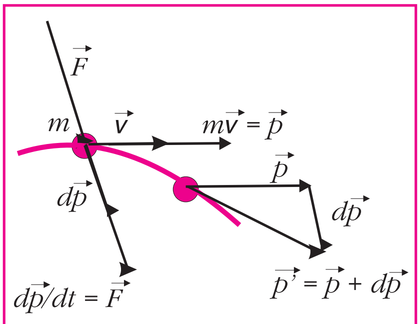

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{cv}{c^2}} = c$$

17

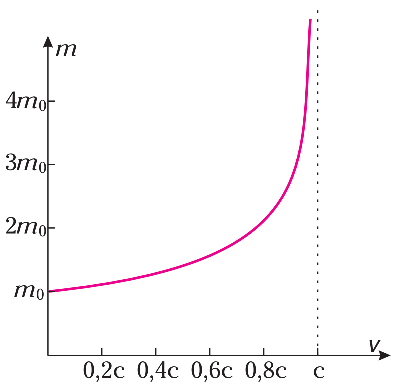
C Relația pentru compunerea relativistă a vitezelor satisface principiul constanței vitezei luminii în vid, deoarece înlocuind $u'_x = c$ se obține $u_x = c$.




Într-un film S.F., astronauții care se vor deplasa cu viteze relativiste și pământenii se vor vedea reciproc îmbătrânind mai încet, se vor vedea clipind din ochi sau mișcându-se cu „încetinitorul", deoarece durata oricărui proces este mai mică pentru observatorul din sistemul în care are loc și apare dilatată pentru orice observator față de care se deplasează cu o viteză de translație relativistă (comparabilă cu viteza luminii). Dar până vor atinge aceste viteze, se vor mișca accelerat și sistemul devine neinerțial (trebuie folosită teoria relativității generalizate), iar biologic, cum va reacționa și îmbătrâni organismul lor? Einstein afirmă în teoria relativității generalizate, care cuprinde și fenomenele gravitaționale (mișcarea unui corp într-un sistem de referință accelerat este echivalentă cu mișcarea lui într-un câmp gravitațional), că doi observatori din două sisteme constată că timpul „curge" mai încet în sistemul accelerat $S'$ decât în sistemul inerțial $S$.




18




19

Problema Rez

* O particulă cu masa de repaus $m_0 \neq 0$ începe să se miște sub acțiunea unei forțe constante $F$. Cât devine viteza relativistă după un interval de timp $t$ foarte mare?

***Rezolvare***

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow mv = Ft$$

$(v_0 = 0$ la $t_0 = 0)$;

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} v = Ft \Rightarrow$$

$$m_0^2 v^2 c^2 = F^2 t^2 (c^2 - v^2);$$

$$v = \frac{Ftc}{\sqrt{F^2t^2 + m_0^2c^2}} =$$

$$= \frac{\cancel{F}tc}{\cancel{F}t\sqrt{1 + m_0^2c^2 / F^2t^2}};$$

$$\lim_{t\to\infty} v = c.$$

## 1.3.2. Principiul fundamental al dinamicii (*F$_2$)

Un electron poate fi accelerat de forţele electrice dintr-un câmp electric. Variaţia energiei cinetice $\Delta E_c$ este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele electrice:

$$\frac{m_e v^2}{2} - \frac{m_e v_0^2}{2} = eU,$$

unde $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, $U$ – tensiunea electrică şi $v_0 << v$ (viteza iniţială $v_0$ a electronilor este neglijabilă pe lângă cea finală în urma accelerării).

Dacă tensiunea electrică are valori mai mari decât $U = 2{,}6 \cdot 10^5$ V, atunci viteza $v$ a electronilor, calculată cu relaţia de mai sus, ar avea valori mai mari decât viteza luminii în vid, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

O forţă electrică a cărei mărime este constantă nu produce o acceleraţie constantă dacă masa electronului în mişcare creşte la viteze relativ mari, comparabile cu viteza luminii:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + ma.$$

Dacă $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, când $m$ = constant, atunci viteza electronilor ar depăşi viteza luminii (în contradicţie cu postulatul al doilea al teoriei relativităţii).

În dinamica relativistă, principiul al doilea al dinamicii are următoarea formă invariantă în raport cu transformările Lorentz:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$$ (fig. 18), unde:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$ $m$ – masa de mişcare şi $m_0$ – masa de repaus a particulei considerate.

Observi că la viteze nerelativiste $v << c$, masa de mişcare este practic egală cu masa de repaus $m_0$, (fig. 19). La viteze comparabile cu viteza luminii în vid $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s, masa corpului creşte cu viteza.

Folosim aproximaţia: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\frac{1}{2}x$, unde $x << 1$, pentru formula masei relativiste:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Înmulţim cu $c^2$ şi obţinem relaţia:

$$mc^2 \approx m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2}, \text{ unde}$$

$m_0c^2 = E_0$ – energia totală de repaus;

$\frac{m_0v^2}{2} = E_c$ – energia cinetică;

$mc^2 = E$ – energia totală corespunzătoare masei de mişcare a particulei considerate.

Impusul total relativist $\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ se conservă în toate ciocnirile.

## 1.3.3. Relaţia masă-energie

Formula $E = mc^2$ exprimă interdependenţa dintre energia unui corp şi masa acestuia.

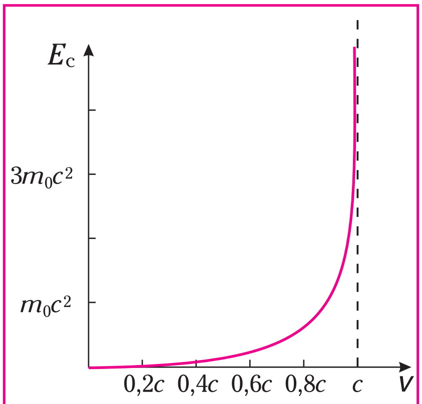
Energia cinetică a unei particule reprezintă diferenţa dintre energia totală $E$ şi energia de repaus $E_0$ (fig. 20).

Folosim aproximarea:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1+\frac{v^2}{2c^2}, \text{ când } v < c \text{ şi } v^2 << c^2.$$

Obţinem:

$$E_c = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 =$$
$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \approx$$
$$\approx m_0c^2\left(1+\frac{v^2}{2c^2} - 1\right) = \frac{m_0v^2}{2}.$$



20

* Care este expresia energiei cinetice a electronilor cu masa de repaus $m_0$ și impulsurile $p$ ?

*Rezolvare*

Din expresia masei relativiste

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

obținem relația: $m^2(1 - v^2/c^2) = m_0^2$ sau $m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$; unde $p = mv$.
$\Rightarrow m^2c^2 = m_0^2c^2 + p^2$.

Înmulțim ultima expresie cu $c^2$ și obținem relația:
$m^2c^4 = m_0^2c^4 + p^2c^2$ sau relația:

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2.$$

Folosim relația $E = E_0 + E_c$ și vom obține:
$p^2c^2 = E^2 - E_0^2 = E_0^2 + E_c^2 + 2E_0E_c - E_0^2$;
$p^2c^2 = E_c^2 + 2E_0E_c$; adică
$E_c^2 + 2E_0E_c - p^2c^2 = 0$ cu soluția

$$E_c = -E_0 + \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} =$$
$$= \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2} - m_0c^2.$$

*** Problemă rezolvată pentru performeri și curioși**

Să demonstrăm că masa unei particule relativiste crește cu viteza când creșterea energiei acestei particule este

$$\mathrm{d}E = c^2\,\mathrm{d}m.$$

***Rezolvare***

Știm că variația energiei este numeric egală cu lucrul mecanic, $\mathrm{d}E_c = L$. Lucrul mecanic elementar efectuat de o forță $F$ la deplasarea pe o mică distanță $\mathrm{d}x$, paralelă cu direcția forței:

$$L = F\cdot \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}dp =$$

$$= v\cdot \mathrm{d}p = v\cdot \mathrm{d}(mv) = vm\mathrm{d}v +$$

$$+v^2\mathrm{d}m = \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(v^2\right) + v^2\mathrm{d}m.$$

Rezultă:

$$c^2\mathrm{d}m = \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(v^2\right) + v^2\mathrm{d}m,$$

de unde obținem

$$\left(c^2 - v^2\right)\mathrm{d}m = \frac{m}{2}\mathrm{d}\left(v^2\right).$$

Notăm $v^2 = y$, separăm variabilele și integrăm expresia:

$$2\int_{m_0}^{m}\frac{1}{m}\cdot \mathrm{d}m = \int_{y_0}^{y}\frac{1}{c^2 - y}\cdot \mathrm{d}y \quad ,$$

unde $y_0 = v_0^2 = 0$ când masa de repaus are valoarea $m_0$ pentru $v_0 = 0$ și $y = v^2$ când masa de mișcare are valoarea $m \neq m_0$. Obținem:

$$2\ln m\Big|_{m_0}^{m} = -\ln\left(c^2 - y\right)\Big|_0^y \quad \text{și}$$

$$2\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

adică: $\left(\dfrac{m}{m_0}\right)^2 = \dfrac{c^2}{c^2 - v^2} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$.

Rezultă: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

**Rezumat Schemă de sinteză**

☑ ***Legile fizicii sunt aceleași față de oricare sistem de referință inerțial.***

☑ ***Viteza de propagare a luminii în vid are aceeași valoare în toate direcțiile, din toate sistemele de referință inerțiale.***

☑ Compunerea relativistă a vitezelor:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \dfrac{vu'_x}{c^2}} \quad \text{sau} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}}.$$

☑ *Durata cinematică* $\Delta t$ este mai mare decât *durata statică* $\Delta t_0$, adică: $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

☑ Lungimea proprie $l_0$ este mai mare decât lungimea cinematică $l$, adică: $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$.

☑ Masa relativistă: $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$,

unde $m_0$ = masa de repaus.

☑ Relația relativistă între masa și energia totală a unei particule libere (în mișcare sau în repaus):

$$E = mc^2 \text{ sau } E_0 = m_0c^2 \text{ și } \Delta E = c^2\Delta m;$$

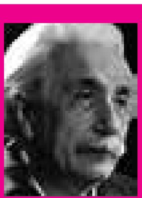
☑ Relația relativistă energie-impuls:

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2.$$

☑ La viteze relativiste, energia cinetică a unei particule materiale reprezintă o parte din energia primită când este accelerată până la o viteză $v$ de ordinul $10^8$ m/s, iar restul din energia primită este stocată prin creșterea masei.

☑ Nicio particulă nu atinge viteza luminii $v = c$, deoarece aceasta ar trebui să ajungă la o energie infinită $\left(E = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$.

☑ În teoria lui Einstein, lumina este considerată ca fiind formată din particule (denumite ulterior fotoni), cu masă de mișcare $m_f$, energia $E_f = m_fc^2$ și impulsul $p_f = m_fc$.



# 1.4. PROBLEME ŞI TESTE PROPUSE

## 1.4.1. Probleme cu grad scăzut de dificultate

**1.** Viteza $\vec{u}$ a unei şalupe care traversează un râu, dacă se deplasează cu viteza relativă $\vec{u}'$ faţă de apă care curge cu viteza $\vec{v}$ (fig. 21), se exprimă nerelativist prin relaţia clasică:

a) $\vec{u}=\vec{u}'+\vec{v}$ ; b) $\vec{u}=\vec{u}'-\vec{v}$ ; c) $\vec{u}=\vec{u}'\cdot\vec{v}$ ; d) $\vec{u}=\vec{u}'/\vec{v}$ .

**2.** O particulă elementară care se deplasează cu viteza $v = 0{,}8c$ are timpul de viaţă $\Delta t_0 = 10^{-8}$ s în sistemul propriu de referinţă. Timpul de viaţă în raport cu laboratorul (sistem de referinţă în repaus relativ) este:

a) $\Delta t = 9 \cdot 10^{-8}$ s; b) $\Delta t = 1{,}66 \cdot 10^{-8}$ s;
c) $\Delta t = 9{,}5 \cdot 10^{-7}$ s; d) $\Delta t = 1{,}66 \cdot 10^{-7}$ s.

**3.** O particulă care se deplasează cu viteza $v = 0{,}99c$ are timpul de viaţă $\Delta t_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ s în sistemul propriu de referinţă. Dacă nu ar fi efectul de dilatare relativistă a timpului, distanţa parcursă de particulă ar fi $l_0 = v\Delta t_0 \approx 7{,}4$ m. În sistemul de referinţă al laboratorului, faţă de care sistemul propriu al particulei se deplasează cu viteza $v$, distanţa parcursă devine:

a) $l \approx 15{,}4$ m; b) $l \approx 35{,}5$ m; c) $l \approx 53$ m; d) $l \approx 79$ m.

**4.** O particulă are diametrul mediu $d_0 = 10^{-10}$ m. Dacă particula este accelerată la viteza $v = 0{,}87c$, dimensiunea particulei pe direcţia de mişcare (fig. 22), devine:

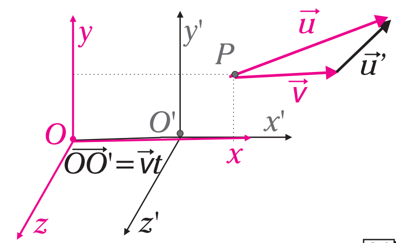
a) $d \approx 0{,}5d_0$; b) $d \approx 0{,}7d_0$; c) $d \approx 0{,}9d_0$; d) $d \approx 0{,}3d_0$.

**5.** O particulă are diametrul mediu propriu $d_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ m. Când se deplasează faţă de sistemul de referinţă al laboratorului cu viteza $v = 2{,}4 \cdot 10^8$ m/s, dimensiunea particulei pe direcţia de mişcare faţă de acest sistem, devine:

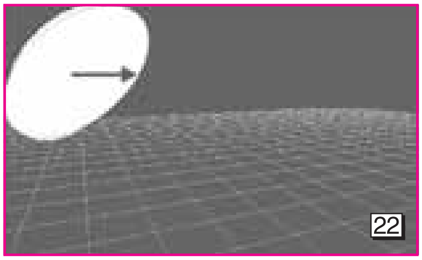
a) $d = 3 \cdot 10^{-10}$ m; b) $d = 3 \cdot 10^{-9}$ m;
c) $d = 3 \cdot 10^{-8}$ m; d) $d = 3 \cdot 10^{-7}$ m.

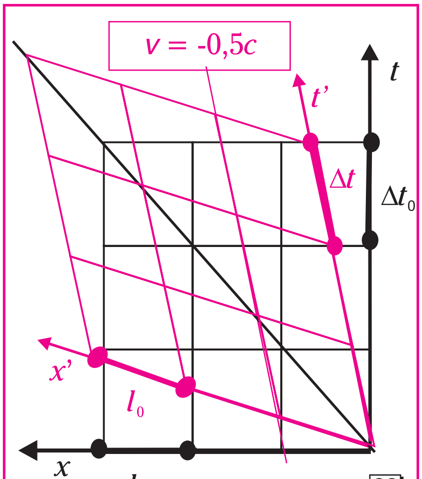
**6.** Mărimea lungimilor de-a lungul direcţiei de mişcare şi durata evenimentelor este relativă (fig. 23), deoarece depinde de:

a) sistemul de unităţi; b) sistemul de referinţă din care se măsoară;
c) calitatea instrumentelor de măsură; d) de observator.



21

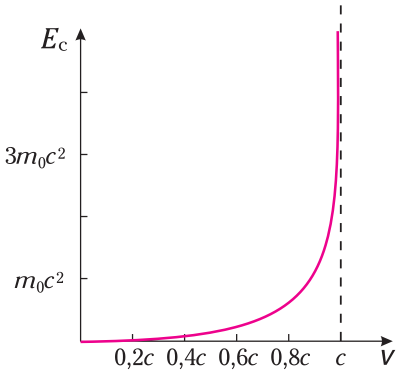

22



23

Dacă $x = 2{,}9c$ (m); $t = 2{,}9$ (s) și $v = -0{,}5c$ (m/s) obținem după înlocuiri: $x' = 5c$ (m); $t' = 5$ (s).

Pentru fig. 23 vezi Webphysics.davidson.edu/Applets/minkowski4/default.html




24

## 1.4.2. Probleme cu grad mediu de dificultate

**7.** Dacă masa de mişcare a unei particule accelerate este de două ori mai mare decât masa de repaus, atunci viteza ei este:

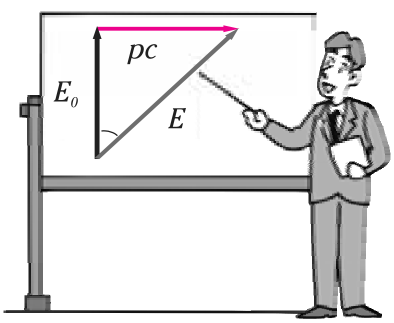
a) $v = 0{,}65c$; b) $v = 0{,}76c$; c) $v = 0{,}87c$; d) $v = 0{,}98c$.

**8.** Viteza maximă pe care au atins-o electronii (într-un accelerator) are valoarea $v = 0{,}999c$. Energia cinetică $E_c = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$ corespunzătoare (fig. 24) are valoarea:

a) $E_c = 10^{-9}$ J; b) $E_c = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ J; c) $E_c = 10^{-8}$ J; d) $E_c = 10^{-10}$ J.

**9.** Dacă energia cinetică a electronilor în mişcare este de două ori mai mare decât energia de repaus $E_0 = m_0c^2$ a acestora, atunci viteza lor reprezintă:

a) $v = 0{,}61c$; b) $v = 0{,}72c$; c) $v = 0{,}83c$; d) $v = 0{,}94c$.




25

**10.** Relaţia relativistă: $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ permite realizarea unui „triunghi relativist” (fig. 25). Se obţine din relaţiile:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\ m^2(1 - v^2/c^2) = m_0^2;\ m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2;$$

$m^2c^2 = m_0^2c^2 + p^2$, unde $p = mv$ şi $v = c$.

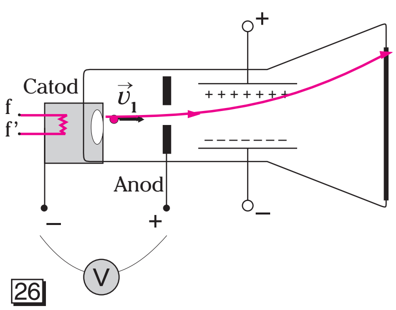
Folosind relaţia $E^2 = E_0^2 + p^2c^2$ şi relaţia $E = E_0 + E_c$, vei obţine relaţia corectă:

a) $p^2 = \dfrac{E_c(E_c+2E_0)}{c^2}$; b) $p^2 = \dfrac{E_c(E_c-2E_0)}{c^2}$;

c) $p^2 = \dfrac{E_c(E_c+2E_0)}{c}$; d) $p^2 = \dfrac{E_c^2+E_0^2}{c^2}$.

**11.** Energia cinetică a unei particule cu masa de repaus $m_0$ şi viteza $v = 0{,}8c$ este:

a) $E_c = 0{,}5m_0c^2$; b) $E_c = 0{,}66m_0c^2$;
c) $E_c = 0{,}7m_0c^2$; d) $E_c = 0{,}8m_0c^2$.




26

**12.** Energia cinetică a unei particule relativiste este egală cu energia de repaus când viteza particulei are valoarea:

a) $v \approx 0{,}55c$; b) $v \approx 0{,}66c$; c) $v \approx 0{,}87c$; d) $v \approx 0{,}99c$.

**13.** Electronii consideraţi în repaus sunt acceleraţi între catodul şi anodul unui tun electronic (fig. 26) la tensiunea $U = 4 \cdot 10^4$ V. Viteza relativistă are valoarea:

a) $v \approx 0{,}85c$; b) $v \approx 0{,}67c$; c) $v \approx 0{,}55c$; d) $v \approx 0{,}99c$.

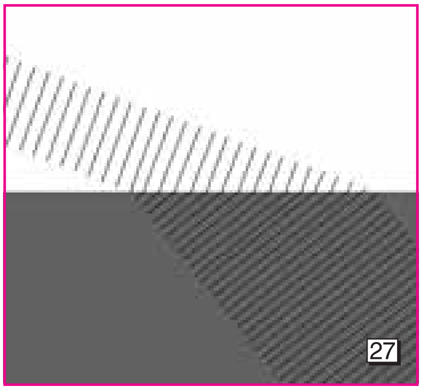
**14.** Un sistem de particule elementare cedează în exterior o cantitate de căldură $Q = 9 \cdot 10^9$ J, în urma unei reacţii nucleare. Masa sistemului s-a modificat cu:
a) $\Delta m = 0{,}1$ mg; b) $\Delta m = 1$ mg; c) $\Delta m = 0{,}1$ g; d) $\Delta m = 1$ g.

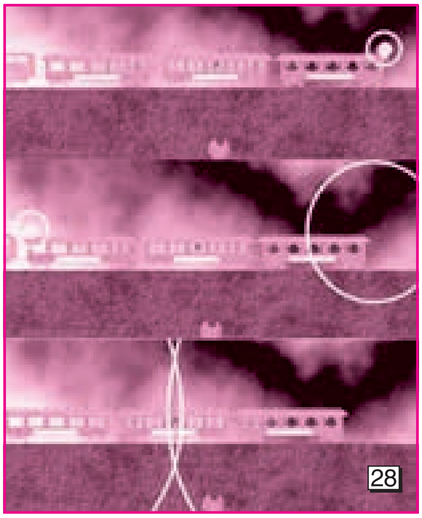
**15.** O particulă cu energia de repaus $E_0 = 10^3$ J este accelerată la viteza $v = 0{,}9c$. Lucrul mecanic efectuat de forţele de accelerare este: a) $L = 10^4$ J; b) $L = 1{,}3 \cdot 10^3$ J; c) $L = 10^2$ J; d) $L = 1{,}3$ J.

**16.** Viteza de deplasare a dreptei de intersecţie a unui front de undă luminoasă plană care intersectează sub unghiul diedru a o suprafaţă plană (fig. 27), aflată în aer ($n_{aer} \approx 1$), este:

a) $v = \dfrac{c}{\cos\alpha}$; b) $v = \dfrac{c}{\sin\alpha}$; c) $v = c$; d) $v = c \cdot \sin\alpha$.

**17.** Un fascicul de electroni monoenergetici de energie cinetică $E_c = 40 \cdot 10^{-15}$ J se deplasează cu viteza:
a) $v = 3 \cdot 10^8$ m/s; b) $v = 2{,}98 \cdot 10^8$ m/s;
c) $v = 1{,}96 \cdot 10^8$ m/s; d) $v = 2{,}2 \cdot 10^8$ m/s.

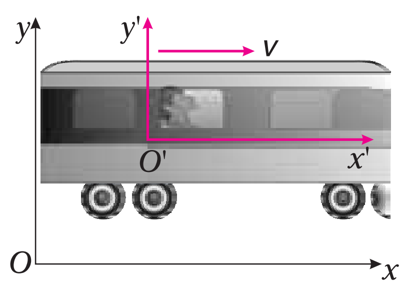

27


28

## 1.4.3. Test pentru autoevaluare

**1.** Două evenimente nesimultane, într-un sistem de referinţă (fig. 28), sunt:
a) nesimultane în alt sistem de referinţă inerţial care se mişcă în acelaşi sens;
b) nesimultane în alt sistem de referinţă inerţial care se mişcă în sens contrar;
c) simultane în alt sistem de referinţă inerţial.

**2.** Există o modalitate ca o persoană dintr-un vehicul cu pereţi netransparenţi să deosebească starea de mişcare uniformă de starea de repaus relativ faţă de pământ (fig. 29)?



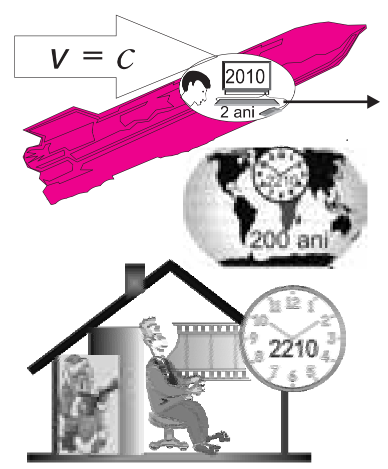
29

**3.** Oamenii harnici se mişcă tot timpul şi li se pare că timpul trece prea repede pentru a termina ce şi-au propus, iar cei comozi se plictisesc şi nu ştiu ce să mai facă. Pentru cei comozi se dilată timpul, conform unei formule din teoria relativităţii, în acest caz?

**4.** Savantul Langevin a expus, în anul 1911, la Congresul de filosofie de la Bologna, printr-un experiment mental speculativ, numit paradoxul gemenilor, dilatarea timpului: „Cel care se reîntoarce pe Pământ după doi ani dintr-o călătorie în cosmos îl va găsi îmbătrânit cu 200 de ani pe celălalt, dacă viteza cu care a călătorit a fost mai mică cu 1/20.000 din viteza luminii…”.

Probleme Răsp

1a; 2b; 3c; 4a; 5a; 6b; 7c; 8b; 9d; 10a; 11b; 12c; 13a; 14a; 15b; 16b; 17d.



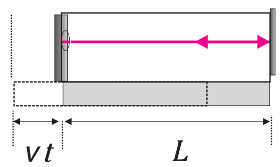

30

Notăm $T_0$ = 2 ani de viaţă pe rachetă, $T$ = 200 de ani de viaţă pe Pământ (fig. 30). Înlocuieşte în relaţia pentru dilatarea timpului:

$T_0 = (1 - v^2/c^2)^{1/2}T$ şi vei descoperi valoarea vitezei de deplasare $v$ = 299.985 km/s. Dacă sunt puşi faţă în faţă printr-un sistem video-tv şi fiecare măsoară timpul său, atunci fiecare observă că celălalt îmbătrâneşte mai încet, iar dacă revine pe Pământ va fi afectat de acceleraţiile şi deceleraţiile care fac să încetinească ceasornicul său, conform teoriei relativităţii generalizate.

Metabolismul şi ritmurile biologice sunt afectate la acceleraţii mari?

**5.** Într-un experiment mental descris deAlbert Michelson (fig. 31), lumina emisă de un blitz aflat într-o extremitate a unei cutii vidate de masă $M$ transmite peretelui opus impulsul fotonilor $p = E/c$ după timpul de propagare $t = L/c$. Din conservarea impulsului obţinem viteza sistemului după impact: $v = E/Mc$. Din conservarea centrului de masă obţinem relaţia: $m_f L = Mx$, unde $x = vt$ şi $m_f$ – masa fotonilor. După înlocuiri vei obţine relaţia care exprimă energia fotonilor:




31

a) $E = m_f c^2$; b) $E = \dfrac{m_f c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$;

c) $E = m_f c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)$; d) $E = \dfrac{p^2}{2m_f}$.

**6.** Din relaţia $E = mc^2$ obţinem: $E^2 = m^2c^4 = m^2c^2(c^2 - v^2 + v^2)$.

Foloseşte relaţiile $p = mv$ şi $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ şi vei obţine relaţia relativistă dintre energia totală $E$ şi impulsul $p$:

a) $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$; b) $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^2$;
c) $E = pc + m_0c^2$; d) $E = p^2c^2 - m_0^2c^4$.

**7.** Un electron cu masa de repaus $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg este accelerat în tunul electronic din tubul televizorului şi atinge ecranul cu viteza $v = 10^8$ m/s. Înainte de impactul cu ecranul, masa electronului în mişcare are valoarea:

a) $m = 9{,}6 \cdot 10^{-31}$ kg; b) $m = 10{,}2 \cdot 10^{-31}$ kg;
c) $m = 12{,}4 \cdot 10^{-31}$ kg; d) $m = 15{,}3 \cdot 10^{-31}$ kg.

***Răspunsuri** la testul pentru autoevaluare:*
1c; 2 nu; 3 nu; 4 da; 5a; 6a; 7a.